

Hinweis: Dies ist eine *inoffizielle*, vorläufige Mitschrift. Aktuelle Tagesmitschriften, eine Fehlermeldeseite sowie eine bereinigte Version dieser Mitschrift gibt es im MedienInfo-Wiki unseres Semesters: www.miwiki.de.vu

inoffizielles Skript
Analysis für Informatiker und Statistiker
WS 2009/2010

Dozent: Dr. Walter Spann
Satz: Das Analysis T_EX Team*

Stand: 20.01.2010
(Vorlesungen vom 19.10. bis 19.01.2010)

*Beteiligte:

LaT_EX-Satz: Marc Winking, Sebastian Straub, Frederic Kettelhoit, Sascha Böckmann
Grafiken: Elisabeth Friedrich, Harald Brunner

0 Grundlagen

19.10.2009

Einleitung

In diesem Abschnitt setzen wir $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ als aus der Schulmathematik bekannt voraus.

Begriffe und Schreibweisen

Mengenbegriff nach CANTOR: Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.

Schreibweise

$x \in M$ bedeutet x ist ein Element von M [z.B. $1 \in \mathbb{N}$]
 $x \notin M$ bedeutet x ist kein Element von M [z.B. $-1 \notin \mathbb{N}$]

Beispiele für Mengen

$\emptyset$	$:= \{\}$	„leere Menge“, Menge, die kein Element enthält
$\mathbb{N}$	$:= \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Z}$	$:= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
$m \cdot \mathbb{Z}$	$:= \{\dots, -2 \cdot m, -1 \cdot m, 0 \cdot m, m, 2 \cdot m, \dots\}$	Menge der ganzzahligen Vielfachen von $m \in \mathbb{N}$ oder Menge der [ohne Rest] durch m teilbaren ganzen Zahlen Beispiel: $m = 2 \rightarrow$ Menge der geraden Zahlen
$\mathbb{Q}$	$:= \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$	[Mengenproblem: $\frac{1}{1} = \frac{2}{2}$]
$\mathbb{R}$	$:=$	Menge der reellen Zahlen (siehe §1).

Mengengleichheit

Zwei Mengen werden als gleich angesehen, wenn sie dieselben Elemente beinhalten. Wir vereinbaren, dass es bei der Schreibweise $\{\dots\}$ weder auf die Reihenfolge ankommt, noch darauf, ob ein Element mehrfach aufgezählt wird (siehe Mengenproblem), z.B. gilt:

$$\{1, 2, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

Mengen können wiederum Mengen als Elemente enthalten, z.B. ist

$$\{1, \{1, 2\}, \{\{3\}\}\}$$

eine Menge¹.

Aussagenlogik

Primäres Ziel ist die Einführung von Schreibweisen und die Verdeutlichung an Beispielen. Eine tiefergehende Begründung bleibt Spezialvorlesungen vorbehalten.

Aussagenbegriff

Eine Aussage ist eine Zeichenreihe, der sich genau einer der Werte wahr (w) oder falsch (f) zuordnen lässt. Beispiele:

$$\begin{array}{ll} 6 \text{ ist gerade } (w) & [6 \in 2 \cdot \mathbb{Z}] (w) \\ 7 \text{ ist durch 3 ohne Rest teilbar } (f) & [7 \in 3 \cdot \mathbb{Z}] (f) \end{array}$$

Man betrachtet auch Aussagen, die von Variablen abhängen („Prädikate“).

Beispiel:

$$n \text{ ist gerade} \rightarrow [\text{Wahrheitswert hängt vom konkreten } n \text{ ab}]$$

Sei M eine Menge und $\mathcal{A}$ für jedes $x \in M$ eine Aussage (*wahr* oder *falsch*).

Dann soll $\{x \in M : \mathcal{A}(x)\}$ die Menge aller $x \in M$ sein, für die $\mathcal{A}(x)$ wahr ist, z.B. ist $\{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^3 - 2x + 2 = 0}_{\mathcal{A}(x)}\}$ eine Menge²:

¹Mengen sind keine Listen, da die Reihenfolge nicht festgelegt ist.

²Klar in der Naiven Mengenlehre, sonst Aussonderungssaxiom

Abbildung 0.1:

Zusammengesetzte Aussagen

Zusammengesetzte Aussagen bildet man mit $\wedge$ „und“, $\vee$ „oder“:

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ wahr genau dann, wenn *beide* Aussagen wahr sind.

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ wahr, wenn *mindestens eine* Aussage wahr ist.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Beispiele:

6 ist gerade $\wedge$ 6 ist durch 3 teilbar (w)
 6 ist gerade $\wedge$ 5 ist durch 3 teilbar (f)
 6 ist gerade $\vee$ 5 ist durch 3 teilbar (w)
 6 ist gerade $\vee$ 6 ist durch 3 teilbar (w)

Bei „oder“ handelt es sich um „*inklusives*“ Oder und nicht um ein „*exklusives*“ Oder („*entweder oder*“).

Der Nicht-Operator

$\mathcal{A}$	$\neg \mathcal{A}$
w	f
f	w

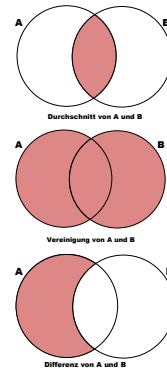
Mengenoperationen

Mit Hilfe dieser logischen Operatoren lassen sich Mengenoperationen definieren:

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} := \{x : x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$ Durchschnitt

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} := \{x : x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$ Vereinigung

$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} := \{x : x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$ „Differenz von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ “, $\mathcal{A}$ ohne $\mathcal{B}$
 $x \notin \mathcal{A}$ ist gleichbedeutend mit $\neg(x \in \mathcal{A})$



Äquivalenz

Beide Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind zugleich wahr oder zugleich falsch.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Sprechweisen:

- $\mathcal{A}$ äquivalent zu $\mathcal{B}$
- $\mathcal{A}$ genau dann, wenn $\mathcal{B}$
- $\mathcal{A}$ notwendig und hinreichend für $\mathcal{B}$

Beispiel:

n ist durch 6 teilbar $\Leftrightarrow n$ ist durch 3 teilbar $\wedge n$ ist gerade (ohne Beweis)

Auch kausal nicht zusammenhängende Aussagen können aussagenlogisch äquivalent sein, z.B.

2 ist gerade $\Leftrightarrow$ 5 ist ungerade (w)
 $0 > 1 \Leftrightarrow$ 3 ist gerade (w)

Implikation: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	Bedeutung
w	w	w	„aus richtigem folgt richtiges“
w	f	f	„aus richtigem kann nichts falsches folgen“
f	w	w	übliche Ergänzung - „Ex falso quodlibet“,
f	f	w	also „aus Falschem folgt Beliebigen“

Sprechweisen:

- Aus $\mathcal{A}$ folgt $\mathcal{B}$
- Wenn $\mathcal{A}$, dann $\mathcal{B}$
- $\mathcal{A}$ ist hinreichend für $\mathcal{B}$
- $\mathcal{B}$ ist notwendig für $\mathcal{A}$ (vgl. Kontrapositionsgesetz auf Seite 11)

20.10.2009

Bemerkungen:

1. Eine wahre Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ bedeutet *nicht*, dass $\mathcal{B}$ wahr ist. Vielmehr besagt sie, dass $\mathcal{B}$ wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ als wahr vorausgesetzt wird.
2. Um zu zeigen, dass die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr ist, kann man annehmen, dass $\mathcal{A}$ wahr ist.

Man muss dann nachweisen, dass $\mathcal{B}$ wahr ist. Wegen der üblichen Ergänzung braucht der Fall „ $\mathcal{A}$ falsch“ nicht weiter untersucht werden, da $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ immer wahr ist, wenn $\mathcal{A}$ falsch ist, unabhängig vom Wahrheitswert von $\mathcal{B}$.

Typische Fragestellung in Beweisen: *ist $\mathcal{A}$ wahr, zeige $\mathcal{B}$.*

Mit der üblichen Ergänzung folgt, dass $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ist, also $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$ die selben Wahrheitstabellen haben.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$
w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f	w
f	f	w	w	w	w	w

Die Aussage

$$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$$

ist somit für alle Bedingungen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit Wahrheitswerten wahr („allgemeingültige Aussage“, „Tautologie“).

Bemerkung Die übliche Ergänzung ergibt sich zwingend, wenn man folgendes verlangt:

1. $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ ist äquivalent zu $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$
2. $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ sollen unterschiedliche Verknüpfungen sein.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w^{**}	f	f
f	w	w^{**}	f	f	f
f	f	w^*	w^*	w^*	w

$*$ = Folgerung aus 1., $**$ = Folgerung aus 2.

Um nicht zu viele Klammern schreiben zu müssen, vereinbaren wir folgende Vorrangregel:

$$\begin{array}{c} \Leftrightarrow \\ \neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \\ \hline \text{abnehmender Vorrang} \end{array}$$

Beispiel $\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ ist zu interpretieren als $(\mathcal{A} \wedge (\neg \mathcal{B})) \vee \mathcal{C}$.

0.1 Gesetze der Aussagenlogik

Die folgenden Aussagen sind allgemeingültig:

(a)	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$	} Kommutativgesetze
(b)	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$	
(c)	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	} Assoziativgesetze
(d)	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	
(e)	$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$	} Distributivgesetze
(f)	$(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$	
(g)	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	} DEMORGANSCHEN Regeln
(h)	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	
(i)	$\neg\neg\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$	Doppelte Verneinung

Beweis: Nachrechnen mit Wahrheitstafeln ($\rightarrow$ Übung).

0.2 Schlussweisen

Folgende Schlussweisen verwendet man sehr häufig. Allgemein gültig sind:

- (a) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$
- (b) $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C})$
- (c) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$

Beweis: Aussage (a) haben wir bereits nachgerechnet,

(b) und (c) ergeben sich analog.

In Beweisen werden die Schlussweisen (b) und (c) häufig (in ungenauer Weise) als

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C} \\ \text{bzw.} \\ \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \end{aligned}$$

abgekürzt. Das verallgemeinert sich in naheliegender Weise auf

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \mathcal{A}_n \\ \text{bzw.} \\ \mathcal{A}_1 \Rightarrow \mathcal{A}_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathcal{A}_n \end{aligned}$$

0.3 Allgemeingültige Aussagen

Allgemein gültig sind

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} &\Leftrightarrow \neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B} \\ \text{(b)} \quad (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) &\Leftrightarrow \neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A} \quad \text{Kontrapositionsgesetz} \end{aligned}$$

Beispiel zu b):

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{n \text{ ist durch 6 teilbar}}_{\mathcal{A}} & \Rightarrow & \underbrace{n \text{ ist durch 3 teilbar}}_{\mathcal{B}} \\ \underbrace{n \text{ ist nicht durch 3 teilbar}}_{\neg \mathcal{B}} & \Rightarrow & \underbrace{\mathcal{A} \text{ ist nicht durch 6 teilbar}}_{\neg \mathcal{A}} \end{array}$$

$\triangleleft (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg \mathcal{A} \Rightarrow \neg \mathcal{B})$ ist *nicht* allgemein gültig!

Beispiel:

$$n \text{ ist nicht durch 6 teilbar} \Rightarrow n \text{ ist nicht durch 3 teilbar}$$

kann falsch sein, z.B. für $n = 9$.

Beweise:

(a) $\rightarrow$ Übung.

(b)

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \\ \stackrel{\text{(a)}}{\Leftrightarrow} &(\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \\ \stackrel{0,1i}{\Leftrightarrow} &\neg \mathcal{A} \vee (\neg \neg \mathcal{B}) \\ \Leftrightarrow &\neg \mathcal{A} \vee \neg(\neg \mathcal{B}) \\ \stackrel{0,1a}{\Leftrightarrow} &\neg(\neg \mathcal{B}) \vee \neg \mathcal{A} \\ \stackrel{\text{(a)}}{\Leftrightarrow} &(\neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}) \end{aligned}$$

oder Nachrechnen mit Wahrheitstafeln.

26.10.2009

Bemerkung Das Kontrapositionsgesetz rechtfertigt für die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ die Bezeichnung „ $\mathcal{B}$ (wahr) notwendig für $\mathcal{A}$ (wahr)“.

Denn wenn $\mathcal{B}$ falsch ist, dann ist $\neg \mathcal{B}$ wahr, also ist nach dem Kontrapositionsgesetz $\neg \mathcal{A}$ wahr, also $\mathcal{A}$ falsch.

Quantorenschreibweise

Sei M eine Menge und $\mathcal{A}(x)$ für jedes $x \in M$ eine Aussage. Um Aussagen zu formulieren, die sich auf alle oder mindestens ein $x \in M$ beziehen, gibt es spezielle Zeichen.

Quantoren

$\forall$ für alle
 $\exists$ es existiert mindestens ein

Die damit gebildeten Ausdrücke

$$\forall x \in M : \mathcal{A}(x) \text{ bzw. } \exists x \in M : \mathcal{A}(x)$$

sind wieder Aussagen (d.h. wahr oder falsch).

Beispiel

$$\begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N} : & n \text{ ist gerade} \quad (f) \\ \exists x \in \mathbb{R} : & x^2 \text{ ist } 1 \quad (w) \quad \text{z.B. } (-1, 1) \end{array}$$

Die Negation von $\forall x \in M : \mathcal{A}(x)$ lautet $\exists x \in M : \neg \mathcal{A}(x)$.³

Beispiel

Negation von $\forall n \in \mathbb{N} : „n \text{ ist gerade}“$: $\exists n \in \mathbb{N} : „n \text{ ist ungerade}“$.

Allgemein gültig ist:⁴

$$\neg (\forall x \in M : \mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg \mathcal{A}(x) \quad (\#)$$

Ebenfalls allgemein gültig ist

$$\neg (\exists x \in M : \mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg \mathcal{A}(x) \quad (\#\#)$$

³ „Alle Menschen sind glücklich“. Negation: „Es gibt mindestens einen unglücklichen Menschen.“

⁴ $\mathcal{A}(x) = „x \text{ ist glücklich}“$

Beispiel Negation von $\underbrace{\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1}_{(w)} \quad \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1}_{(f)}$

(##) folgt aus (#) durch folgende Schritte

Ersetze $\mathcal{A}(x)$ durch $\neg\mathcal{A}(x)$:

$$\neg(\forall x \in M : \neg\mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg\neg\mathcal{A}(x)$$

Negation beider Seiten:

$$\neg\neg(\forall x \in M : \neg\mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow \neg\exists x \in M : \mathcal{A}(x)$$

und Vertauschen beider Seiten.

Aussagen können auch von mehreren Variablen abhängen. Dementsprechend betrachtet man mehrfache Quantoren.

$$\forall x \in M : \forall y \in N : \mathcal{A}(x, y)$$

Beispiel

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : (x - y)^2 \geq 0 \quad (w)$$

Benachbarte gleiche Quantoren können problemlos vertauscht werden, d.h. allgemein gültig ist:

$$\forall x \in M \forall y \in N : \mathcal{A}(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in N \forall x \in M : \mathcal{A}(x, y)$$

Verschiedene Quantoren dürfen im Allgemeinen *nicht* vertauscht werden.

Beispiel

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : n > x \quad (\text{ARCHIMEDISCHES Axiom}) \quad (w)$$

Behauptung: zu jeder reellen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl.

ist nicht gleichbedeutend mit

$$\exists n \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R} : n > x \quad (f)$$

Bedeutung: Es gibt eine natürliche Zahl, die größer ist als alle reellen Zahlen.

Negation mehrerer Quantoren erfolgt durch Umkehren jedes einzelnen Quantors.

Beispiel

$\mathbb{P}$ bezeichne an dieser Stelle die Menge der Primzahlen.

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{P} : p > n$$

„Es gibt unendlich viele Primzahlen.“

$$\text{Negation: } \exists n \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{P} : p \leq n$$

„Es gibt nur endlich viele Primzahlen.“

Bemerkung

In der Prädikatenlogik führt man die Quantoren ohne Bezug auf Mengen ein („universelle Quantoren“), d.h.

$$\forall x : \mathcal{A}(x), \quad \exists x : \mathcal{A}(x)$$

Der Übergang zur Schreibweise mit Mengen erfolgt durch

$$\forall x \in M : \mathcal{A}(x) :\Leftrightarrow \forall x : x \in M \Rightarrow \mathcal{A}(x)$$

$$\exists x \in M : \mathcal{A}(x) :\Leftrightarrow \exists x : x \in M \wedge \mathcal{A}(x)$$

Die Negation der universellen Quantoren ist gegeben durch

$$\neg \forall x : \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg \mathcal{A}(x)$$

bzw.

$$\neg \exists x : \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg \mathcal{A}(x)$$

die allgemein gültig sind.

Daraus lassen sich die bereits vorgestellten Negationsregeln für Quantoren in Mengen ableiten. Wir werden universelle Quantoren nur wenige Male benutzen.

0.4 Mengenoperationen

Seien A, B Mengen.

- (a) $A = B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$ Mengengleichheit formal
- (b) $A \subset B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ A Teilmenge von B
- (c) $\mathcal{P}(A) \quad := \quad \{M : M \subset A\}$ Potenzmenge von A : Menge aller Teilmengen von A

Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Existenz von $\mathcal{P}(A)$ klar in der naiven Mengenlehre, sonst Potenzmengenaxiom.

0.5 Folgerung (Mengenoperationen)

Seien A, B Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B \\ \text{(b)} \quad & A \subset B \wedge B \subset C \Leftrightarrow A \subset C \end{aligned}$$

Beweis

(a)

$$\begin{aligned} A = B & \stackrel{0,4a}{\Leftrightarrow} \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B \\ & \stackrel{0,2a}{\Leftrightarrow} \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A) \\ & \stackrel{(\#)}{\Leftrightarrow} \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x : (x \in B \Rightarrow x \in A) \\ & \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A \end{aligned}$$

Anmerkung zu (#): Allgemein gültig sind die folgenden Regeln

$$\begin{aligned} \forall x : \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x) & \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x : \mathcal{B}(x)) \\ \text{und } \exists x : \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x) & \Leftrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \vee (\exists x : \mathcal{B}(x)) \end{aligned}$$

Beweis der ersten Regel:

„ $\Rightarrow$ “: $\forall x : \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)$ sei wahr. Dann ist für jedes x $\mathcal{A}(x)$ und $\mathcal{B}(x)$ wahr, also auch $\mathcal{A}(x)$, d.h. $\forall x : \mathcal{A}(x)$ ist wahr.

Entsprechend folgt $\forall x : \mathcal{B}(x)$ wahr, also insgesamt $\forall x : \mathcal{A}(x) \wedge \forall x : \mathcal{B}(x)$ wahr.

„ $\Leftarrow$ “: $\forall x : \mathcal{A}(x) \wedge \forall x : \mathcal{B}(x)$ sei wahr.

Somit ist für beliebiges $x : \mathcal{A}(x)$ wahr und ebenso $\mathcal{B}(x)$, also auch $\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)$: d.h. $\forall x : \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)$ ist wahr.

Nicht allgemeingültig sind

$$\begin{aligned} (\forall x : \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) & \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee (\forall x : \mathcal{B}(x)) \\ (\exists x : \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) & \Leftrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\exists x : \mathcal{B}(x)) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{array}{l}
\mathcal{A}(x) :\Leftrightarrow x = 1 \quad \mathcal{B}(x) :\Leftrightarrow x \neq 1 \\
\forall x : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \quad (w) \\
\underbrace{\forall x : \mathcal{A}(x)}_{(f)} \vee \underbrace{\forall x : \mathcal{B}(x)}_{(f)} \quad (f)
\end{array}$$

27.10.2009**0.6 Regeln (Mengenoperationen)**Seien A, B, C Mengen. Dann gilt

$$\begin{array}{ll}
\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \quad A \cup B = B \cup A \\ \text{(b)} \quad A \cap B = B \cap A \end{array} \right\} & \text{Kommutativgesetz} \\
\left. \begin{array}{l} \text{(c)} \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ \text{(d)} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right\} & \text{Assoziativgesetz} \\
\left. \begin{array}{l} \text{(e)} \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ \text{(f)} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{array} \right\} & \text{Distributivgesetz}
\end{array}$$

Beweis (f)

$$\begin{array}{ll}
& x \in (A \cap B) \cup C \\
\stackrel{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow} & x \in A \cap B \vee x \in C \\
\stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} & \underbrace{(x \in A \wedge x \in B)}_{A \cap B} \vee \underbrace{x \in C}_C \\
\Leftrightarrow & (A \cap B) \vee C \\
\stackrel{0,1f}{\Leftrightarrow} & (A \vee C) \wedge (B \vee C) \quad \text{allgemein gültig} \\
\Leftrightarrow & (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
\stackrel{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow} & (x \in A \cup C) \wedge (x \in B \cup C) \\
\stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} & x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)
\end{array}$$

Somit haben wir gezeigt:

$$\begin{array}{l}
\forall x : x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
\text{nach Def. 0.4a} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)
\end{array}$$

Restliche Aussagen analog, z.T. Übung.

Bemerkung

Entsprechend zeigt man die unmittelbar einsichtigen Aussagen

$$A \cup A = A, A \cap A = A, A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$$

über die allgemein gültigen Aussagen

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{A} \vee f \Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{A} \wedge f \Leftrightarrow f$$

0.7 Satz (Mengenoperationen)

Seien A, B, M Mengen, dann gilt

- (a) $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$
- (b) $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$
- (c) $M \setminus (M \setminus A) = M \cap A$

Beweise

(a)

$$\begin{aligned}
 & x \in M \setminus (A \cup B) \\
 \stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge x \notin A \cup B \\
 \stackrel{\text{Def. } \notin}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge \neg(x \in A \cup B) \\
 \stackrel{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge \neg(x \in A \vee x \in B) \\
 \stackrel{\text{Def. 0, 1g}}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge (\neg x \in A \wedge \neg x \in B) \\
 \stackrel{\text{Def. } \notin}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\
 \Leftrightarrow & (x \in M \wedge x \in M) \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\
 \stackrel{0, 1a-d}{\Leftrightarrow} & (x \in M \wedge x \notin A) \wedge (x \in M \wedge x \notin B) \\
 \stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} & (x \in M \setminus A) \wedge (x \in M \setminus B) \\
 \stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} & x \in (M \setminus A) \cap (M \setminus B)
 \end{aligned}$$

Beweise (b), (c) $\rightarrow$ Übung.

Die Korrespondenz zu den Formeln der Aussagenlogik tritt deutlicher hervor im Fall $A, B \subset M$.

Mit $\mathbb{C}_M A := M \setminus A$, $\mathbb{C}_M B := M \setminus B$ ergibt sich aus Satz 0.7:

0.8 Folgerung (Complement)

Seien A, B, M Mengen, $A \subset M, B \subset M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \mathbb{C}_M(A \cup B) &= \mathbb{C}_M A \cap \mathbb{C}_M B \\ \text{(b)} \quad \mathbb{C}_M(A \cap B) &= \mathbb{C}_M A \cup \mathbb{C}_M B \\ \text{(c)} \quad \mathbb{C}_M \mathbb{C}_M A &= A \end{aligned}$$

0.9 Definition (Indexmengen)

Sei I eine nicht leere (Index-)Menge und A_i für jede $i \in I$ eine Menge. Dann

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \bigcup_{i \in I} A_i &:= \underbrace{\{x : \exists i \in I : x \in A_i\}}_{\text{Menge aller } x, \text{ die in mind. einem } A_i \text{ enthalten sind}} && \text{Vereinigung der Mengen } A_i (i \in I) \\ \text{(b)} \quad \bigcap_{i \in I} A_i &:= \underbrace{\{x : \forall i \in I : x \in A_i\}}_{\text{Menge aller } x, \text{ die in jedem } A_i \text{ enthalten sind.}} && \text{Durchschnitt der Mengen } A_i (i \in I) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. I kann unendlich sein.
2. Falls $I = \{1, \dots, n\}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ \text{und} \quad \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n. \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in \{1, 2\}} A_i &\Leftrightarrow \exists i \in \{1, 2\} : x \in A_i \\ &\Leftrightarrow x \in A_1 \vee x \in A_2 \\ &\Leftrightarrow x \in A_1 \cup A_2 \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

0.10 Regeln (Durchschnitt und Vereinigung von Indexmengen)

Sei M eine Menge, I und A_i wie in Definition 0.9. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup M = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup M) \\
 (b) \quad & \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap M = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap M) \\
 (c) \quad & \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap M = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap M) \\
 (d) \quad & \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup M = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup M) \\
 (e) \quad & M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (M \setminus A_i) \\
 (f) \quad & M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i)
 \end{aligned}$$

Beweise

(e)

$$\begin{aligned}
 & x \in M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i \\
 \stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\
 \stackrel{\text{Def. } \notin}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge \neg(x \in \bigcup_{i \in I} A_i) \\
 \stackrel{\text{Def. } \cup}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge \neg(\exists i \in I : x \in A_i) \\
 \stackrel{\neg \exists}{\Leftrightarrow} & (x \in M) \wedge \forall i \in I : \neg(x \in A_i) \\
 \stackrel{\text{Def. } \notin}{\Leftrightarrow} & x \in M \wedge \forall i \in I : x \notin A_i \\
 \stackrel{\text{Bem. A}}{\Leftrightarrow} & \forall i \in I : x \in M \wedge x \notin A_i \\
 \stackrel{\text{Def. } \setminus}{\Leftrightarrow} & \forall i \in I : x \in M \setminus A_i \\
 \stackrel{\text{Def. } \cap}{\Leftrightarrow} & x \in \bigcap_{i \in I} M \setminus A_i
 \end{aligned}$$

Bemerkung A:

Eingegangen sind die allgemeinen Regeln:

$$\begin{aligned}
 \forall x : (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge \mathcal{B} \\
 \forall x : (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee \mathcal{B} \\
 \exists x : (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) & \Leftrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \wedge \mathcal{B} \\
 \exists x : (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) & \Leftrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \vee \mathcal{B}
 \end{aligned}$$

aus denen die entsprechenden Aussagen über Quantoren über Mengen folgen (d.h. $(\forall x \in M : \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\forall x \in M : \mathcal{A}(x)) \wedge \mathcal{B}$ ist allgemein gültig). Entscheidend ist, dass $\mathcal{B}$ nicht von der Quantorenvariablen x abhängig ist (vgl. Beispiel in 0.6).

Exemplarisch soll die Allgemeingültigkeit von

$$\forall x : \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee \mathcal{B}$$

gezeigt werden.

„ $\Rightarrow$ “ $\forall x : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B})$ sei wahr.

1. Fall $\mathcal{B}$ sei wahr. Dann ist trivialerweise $(\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee \underbrace{\mathcal{B}}_{(w)}$ wahr.
2. Fall $\mathcal{B}$ falsch. Da für jedes $x : \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}$ als wahr vorausgesetzt ist, folgt wegen $\mathcal{B}$ falsch, dass $\mathcal{A}(x)$ wahr ist. Also ist $\forall x : \mathcal{A}(x)$ wahr und somit $\underbrace{(\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee \mathcal{B}}_{(w)}$.

„ $\Leftarrow$ “ $\forall x : (\mathcal{A}(x)) \vee \mathcal{B}$ sei wahr.

1. Fall $\mathcal{B}$ sei wahr. Dann ist trivialerweise für jedes $x : \mathcal{A}(x) \vee \underbrace{\mathcal{B}}_{(w)}$ wahr, also $(\forall x : (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}))$ wahr.
2. Fall $\mathcal{B}$ falsch. Da $\mathcal{B}$ falsch ist und nach Voraussetzung $\forall x : \mathcal{A}(x) \vee \underbrace{\mathcal{B}}_{(f)}$ wahr, muss $\forall x : \mathcal{A}(x)$ wahr sein.
Also ist für beliebiges $x : \mathcal{A}(x)$ wahr und somit auch $\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}$. Daher ist $\forall x (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B})$ wahr.

— Grafik 0.10-01 —

02.11.2009

0.11 Kartesische Produkte

Seien A, B Mengen. Wir setzen $A \times B := \{\underbrace{(a, b)}_{\text{Paar}} : a \in A, b \in B\}$.

Dabei sind zwei Paare genau dann gleich, wenn die entsprechenden Komponenten gleich sind, d.h.

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

Bemerkung

(a) Paare und Mengen sind verschieden, z.B. gilt

$$(1, 2) \neq (2, 1) \text{ jedoch } \{1, 2\} = \{2, 1\}$$

(b) Paare können auf Mengen zurückgeliefert werden, z.B. kann man definieren

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Veranschaulichung

Kartesisches Produkt in Mengen

Seien $A_1, \dots, A_k$ endlich viele Mengen ($k \geq 2$). Dann heißt

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k := \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : \forall i \in \{1, \dots, k\} : a_i \in A_i\}$$

das Kartesische Produkt der Mengen $A_1, \dots, A_k$. Dabei sind zwei „k-Tupel“ $(a_1, \dots, a_k)$ und $(a'_1, \dots, a'_k)$ genau dann gleich, wenn $a_1 = a'_1 \wedge a_2 = a'_2 \wedge \dots \wedge a_k = a'_k$.

Falls $A_1 = A_2 = \dots = A_k$, schreibt man $A^k := A \times \dots \times A$ und setzt $A^1 := A$.

0.12 Abzählungen einiger endlicher Mengen

Fakultät, Binomialkoeffizient

(a)

$$n! := n \times (n-1) \times \dots \times 1 \quad (n \in \mathbb{N}, 0! := 1)$$

Sprechweise: n Fakultät

(b)

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, 0! := 1).$$

Sprechweise: „n über k“, Binomialkoeffizient

0.13 Folgerung (Fakultät, Binomialkoeffizient)

(a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot \overbrace{n-k+1}^{n-k-1}}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$$

(b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, k \leq n)$$

Beispiel

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Beweis

(a)

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \quad (k \leq n) \end{aligned}$$

Für $k > n$ ist $n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) = 0$ und ebenso nach Definition $\binom{n}{k}$. Also gilt die Aussage auch für $k > n$.

(b) Wegen $\binom{n}{k} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1$, $\binom{n-1}{n-1} = 1$ und $\binom{n-1}{n} = 0$ gilt

$\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}$, also ist die Aussage richtig für $k = n$.

Für $1 \leq k \leq n-1$ folgt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{k + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n-1}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\ &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \end{aligned}$$

Bemerkung:

1. (b) ermöglicht die Berechnung der Binomialkoeffizienten über das PASCALSCHES Dreieck:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & & & \vdots & & & \\
 \binom{n}{0} & \cdots & & \binom{n}{k} & \cdots & & \binom{n}{n} \\
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 & & & \vdots & & &
 \end{array}$$

Insbesondere zeigt sich daraus, dass $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für $0 \leq k \leq n$ ($n, k \in \mathbb{N}$).

2. Auch über die Formel (a) kann $\binom{n}{k}$ effizient in ganzzahliger Arithmetik berechnet werden

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots \frac{n-k+1}{k}$$

0.14 Satz (Mengen)

Sei A eine Menge aus n Elementen, $n \in \mathbb{N}$. (Schreibweise $\underbrace{|A|}_{\text{Anzahl der Elemente}} = n$).

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a)

$$|A^k| = \left| \underbrace{(x_1, \dots, x_k)}_{\text{k-Tupel aus Elementen von } A} : x_1, \dots, x_k \in A \right| = n^k$$

(b)

$$\begin{aligned}
 & \left| \underbrace{(x_1, \dots, x_k)}_{\text{k-Tupel ohne Wiederholung aus Elementen von } A} : x_1, \dots, x_k \in A, \underbrace{\forall i \neq j : x_i \neq x_j}_{x_1, x_2 \text{ paarweise verschieden}} \right| \\
 & = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \text{ für } 1 \leq k \leq n
 \end{aligned}$$

(c)

$$|\{ \underbrace{\{x_1, \dots, x_k\}}_{\text{k-elementige Teilmenge von A}} : x_1, \dots, x_k \in A, \forall x_k \in A, \forall i \neq j : x_i \neq x_j \}| = \binom{n}{k} \text{ für } 0 \leq k \leq n$$

(d)

$$|\underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\text{Potenzmenge = Menge aller Teilmengen von A}}| = 2^n$$

(e) Sei $x \neq y, 0 \leq k \leq n$.

$$|\{(z_1, \dots, z_n) \in \{x, y\}^n : |\{i : z_i = x\}| = k\}| = \binom{n}{k}$$

n -Tupel, bei denen x k -fach vorkommt und y $n-k$ -fach vorkommt.

Beweis

Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ($a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden).

(a) Für die erste Komponente x_1 gibt es n Möglichkeiten zur Auswahl, für die zweite Komponente x_2 ebenfalls n usw., insgesamt also

$$\frac{n \dots n}{k\text{-mal}} = n^k$$

(b) Für die erste Komponente x_1 gibt es n Möglichkeiten zur Auswahl, für die zweite Komponente x_2 $n-1$ (weil sie von der ersten verschieden sein muss), für die dritte Komponente $n-2$ (weil sie von den ersten beiden verschieden sein muss) usw.

(c) die Behauptung ist richtig für $k=0$, da die leere Menge die einzige 0-elementige Teilmenge von A ist.

Sei $1 \leq k \leq n$. Zu jeder k -elementigen Teilmenge $\{x_1, \dots, x_k\}$ von A gibt es genau $k(k-1) \dots 1 = k!$ verschiedene k -Tupel ohne Wiederholung aus $\{x_1, \dots, x_k\}$.

Daher gilt:

$$\begin{aligned} & (\text{Anzahl der } k\text{-elementigen Teilmengen von } A) \cdot k! \\ &= (\text{Anzahl der } k\text{-Tupel ohne Wiederholung aus Elementen von } A) \\ &= n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \end{aligned}$$

Also Anzahl k -elementiger Teilmengen von

$$A = \frac{n(n-1)(n-k+1)}{k!} \stackrel{0.13a}{=} \binom{n}{k}$$

- (d) Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ($a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden).

Wir können jeder Teilmenge B von A durch genau ein n -Tupel $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n) \in \{0, 1\}^n$ beschreiben, in dem wir $\chi_i = 0$, falls $a_i \notin B$ oder $\chi_i = 1$, falls $a_i \in B$ setzen.

Die Anzahl aller Teilmengen von A ist also die Anzahl aller n -Tupel aus 0 und 1.

Die Behauptung folgt aus $|\{0, 1\}| \stackrel{(a)}{=} 2^n$.

- (e) Jedes n -Tupel, in dem x k -fach und y $(n-k)$ -fach vorkommt, entspricht genau ein n -Tupel $\chi \in \{0, 1\}^n$ mit k Einsen und $n - k$ Nullen. Nach dem Beweis zu (d) entspricht das genau einer k -elementigen Teilmenge von a . Die Behauptung folgt dann aus c).

03.11.2009

0.15 Relationen und Funktionen

Definition

Seien X, Y Mengen, $R \subset X \times Y$. Dann heißt das Tripel (X, Y, R) Relation zwischen X und Y . Falls $X = Y$ spricht man von einer *binären* Relation oder einer Relation auf X . In diesem Fall benutzt man die Schreibweise

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$$

und schreibt: $(x, \sim)$ an Stelle von (X, Y, R)

Beispiel

- (a)

$$(\mathbb{R}, \leq)(\mathbb{R}, <)(\mathbb{R}, \geq)(\mathbb{R}, =)$$

sind jeweils Relationen auf $\mathbb{R}$.

[Die zugehörigen Mengen lauten $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ usw.]

Da jede Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ eine Reihe auf $\mathbb{R}$ definiert ist, ist auch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

eine Relation.

- (b)

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 5)\}$$

Andere Möglichkeiten der Veranschaulichung:

[Die Fragestellung “Auto y gehört Person x ” führt auf den Begriff der Umkehrrelation.]

0.16 Definition (Umkehrrelation)

Sei $\mathcal{R} = (X, Y, R)$ eine Relation. Die Relation $(Y, X, \overset{-1}{\mathcal{R}})$ mit $\overset{-1}{\mathcal{R}} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in \mathcal{R}\}$ heißt Umkehrrelation von $\mathcal{R}$ (bzw. $\overset{-1}{\mathcal{R}}$).

Bemerkung:

- (a) Umkehrrelationen existieren immer (im Unterschied zu den noch zu betrachtenden Umkehrfunktionen).

- (b) Es gilt $\overset{-1}{\mathcal{R}}^{-1} = \mathcal{R}$ wegen $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow (y, x) \in \overset{-1}{\mathcal{R}} \Leftrightarrow (x, y) \in \left(\overset{-1}{\mathcal{R}}\right)^{-1}$

Beispiel

(Beispiel von oben)

$$\begin{aligned} &\text{Umkehrrelation } (Y, X, \overset{-1}{\mathcal{R}}) \\ &Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad X = \{1, 2, 3, 4\} \\ &\overset{-1}{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (5, 4)\} \end{aligned}$$

Interpretation: $(y, x) \in \overset{-1}{\mathcal{R}} : \text{Auto } y \text{ gehört zu Person } x.$

0.17 Abbildung, Funktion

Eine Relation $f = (X, Y, \mathcal{R})$ heißt Abbildung der Funktion, wenn gilt

$$\forall x \in X \quad \underbrace{\exists_1}_{\text{“genau ein“}} y \in Y (x, y \in \mathcal{R})$$

d.h. jedem $x \in X$ wird genau ein $y \in Y$ zugeordnet. Wir nennen y Funktionswert von f an der Stelle x und schreiben $y = f(x)$.

An Stelle von $f = (X, Y, \mathcal{R})$ schreiben wir $f : X \rightarrow Y$ und nennen X Definitionsbereich oder Quelle von f und Y Wertebereich oder Ziel von f und $\mathcal{R}$ Graph von f (Schreibweise Graph f).

Bemerkungen

- (a) Für Funktionen benutzen wir häufig eine der Schreibweisen:

$$f : X \rightarrow Y, y = f(x) \text{ bzw. } f : X \rightarrow Y, x \rightarrow y$$

- (b) Bei Funktionen mit reellem Wertebereich (d.h. $Y = \mathbb{R}$) - so genannte reellwertige Funktionen - werden wir uns oft mit der Angabe des Definitionsbereichs und der Abbildungsvorschrift begnügen: z.B.

$$f(x) = \sqrt{x} : (x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}), \text{ dabei: } \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Meist schreiben wir häufig nur

$$f(x) = \sqrt{x} : (x > 0)$$

- (c) Quelle und Ziel gehören zur Abbildung dazu, d.h.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ und} \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad g(x) = x^2 \end{aligned}$$

sind streng genommen zwei verschiedene Funktionen.

- (d) Beispiel (b) nach 0.15 ist **keine** Funktion, denn:

$2 \in X$ werden 2 Werte, nämlich $2, 3 \in Y$ zugeordnet. Außerdem wird $3 \in X$ überhaupt kein Wert zugeordnet.

Dagegen ist $f = (X, Y, \mathcal{R})$ mit $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{R} = \underbrace{\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 2)\}}_{\text{Graph } f}$

eine Funktion.

— Grafik 0.17-01 und 02 —

Vergleichbar lässt sich $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ veranschaulichen:

— Grafik 0.17-03 —

0.18 Bezeichnungen

- (a) Sei X eine Menge, $id_x : X \rightarrow X, x \rightarrow x$ heißt Identität auf X .
- (b) Sei X eine Menge $A \subset X$. $L_A : A \rightarrow X, x \rightarrow x$ heißt Einbettung oder Inklusion von A in X .
- (c) Sei $f : x \rightarrow y$ eine Funktion, $A \subset X, f|_A, A \rightarrow Y, x \rightarrow f(x)$ heißt Einschränkung oder Restriktion von f auf A .

Bemerkung: $L_A = id_x|_A$.

0.19 Bild, Urbild

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung ($\rightarrow$ Funktion), $A \subset X, B \subset Y$.

- (a) $f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$ heißt „Bild von A unter f “.
- (b) $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} = \{x \in X : \exists y \in B : y = f(x)\}$ heißt „Urbild von B unter f “.

Beispiel

— Grafik 0.19-01 —

[Bemerkung: $f^{-1}(B)$ stimmt mit $f^{-1}(B)$, dem Bild von B unter der noch zu definierenden Umkehrfunktion f^{-1} , überein, *sofern* diese existiert.]

0.20 Verkettung von Abbildungen

Seien $f : X \rightarrow Y_1$ und $g : Y_2 \rightarrow Z$ Abbildungen mit $f(x) \in Y_2$.

Die Abbildung

$$X \rightarrow Z, x \rightarrow g(f(x))$$

heißt Verkettung von g mit f und wird mit $g \circ f$ bezeichnet.

Bemerkung

- (a) Um $g(f(x))$ definieren zu können, ist es erforderlich, dass $g(x) \in Y_2$ (Y_2 Definitionsbereich von g) für alle $x \in X$ gilt, d.h. $f(x) \in Y_2$.
- (b) Oft wird $Y_1 = Y_2$ für die Verkettung von Funktionen vorausgesetzt. In diesem Fall gilt trivialerweise $f(x) \in Y_2$. Für die Zwecke der Analysis ist die hier betrachtete allgemeine Fassung günstiger.

Beispiele:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g &: \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, g(x) = \sqrt{x} \\ g \circ f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

09.11.2009

0.21 Satz - Assoziativität der Verkettung

Seien $f : X \rightarrow Y_1, g : Y_2 \rightarrow Z_1, h : Z_2 \rightarrow W$ Abbildungen mit $f(X) \subset Y_2$ und $g(Y_2) \subset Z_2$. Dann gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Beweis:

$$g : Y_2 \rightarrow Z_2, h : Z_2 \rightarrow W \xrightarrow{g(Y_2) \subset Z_2} h \circ g : Y_2 \rightarrow W \text{ wohldefiniert}$$

$$f : X \rightarrow Y_1, h \circ g : Y_2 \rightarrow W \xrightarrow{f(X) \subset Y_2} (h \circ g) \circ f : X \rightarrow W \text{ wohldefiniert}$$

$$f : X \rightarrow Y_1, g : Y_2 \rightarrow Z_1 \xrightarrow{f(X) \subset Y_2} g \circ f : X \rightarrow Z_1 \text{ wohldefiniert}$$

$$g \circ f : X \rightarrow Z_1, h : Z_2 \rightarrow W \xrightarrow{(g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y_2) \subset Z_2} h \circ (g \circ f) : X \rightarrow W \text{ wohldefiniert}$$

Sei $x \in X$ beliebig.

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

Aus der Übereinstimmung der Funktionswerte, der Gleichheit der Definitions- und Wertebereiche folgt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Bemerkung

Auch bei identischem Definitions- und Wertebereich gilt im allgemeinen:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Beispiel

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) + 1 = x^2 + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Beispiel: Beim schnellen Potenzieren wird ausgenutzt, dass die Berechnung

$$x^{(2^n)} = \underbrace{x \dots x}_{2^n \text{ mal}}$$

schneller ausgeführt werden kann, wenn man n -mal quadriert, statt 2^n -mal zu multiplizieren.

$$(x^{(2^n)}) = \left((x^2) \right)^2 = \underbrace{f(f \dots f(x))}_{n\text{-mal}} = \underbrace{f(f \circ \dots \circ f(x))}_{n\text{-mal}} \text{ mit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

0.22 Definition

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *injektiv*, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

(b) f heißt *surjektiv*, wenn

$$f(X) = Y$$

(c) f heißt *bijektiv*, wenn f zugleich *injektiv* und *surjektiv* ist.

Bemerkung zu (a): Oft ist es einfacher, die Kontraposition zu beweisen:

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Beispiele

1.

$$X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$f : X \rightarrow Y, f(1) = 4, f(2) = 2, f(3) = 3$$

— Grafik 0.22-01 —

f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

2.

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, Y = \{1, 2, 3\}$$

$$f : X \rightarrow Y, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 2$$

— Grafik 0.22-02 —

f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

3.

$$X = \{1, 2, 3\}, Y = \{2, 3, 4\}$$

$$f : X \rightarrow Y, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 3$$

— Grafik 0.22-03 —

4.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

ist *nicht* injektiv, denn: $-1 \neq 1$, aber $f(-1) = f(1)$

$$g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, g(x) = x^2 \text{ ist injektiv, also}$$

$$\tilde{g} : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \tilde{g}(x) = x^2$$

denn:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2$$

$$= \underbrace{(x_1 - x_2)}_{+0} \underbrace{(x_1 + x_2)}_{>0} \neq 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 \neq x_2^2 (x_1, x_2 \geq 0)$$

5.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist nicht surjektiv, denn: $-1 \notin f(\mathbb{R})$, da $f(x) \geq 0 (x \in \mathbb{R})$

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist surjektiv (ohne Beweis) [Der Beweis setzt die Existenz der Quadratwurzel voraus, die erst später gezeigt wird]

0.23 Lemma

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Dann gilt:

- (a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
- (b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

Beweis

(a) Zu zeigen: $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' (x, x' \in X)$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x') &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(x')) \\ \Leftrightarrow (g \circ f)(x) &= (g \circ f)(x') \stackrel{g \circ f \text{ injektiv}}{\Rightarrow} x = x' (x, x' \in X) \end{aligned}$$

(b) zu zeigen: $g(Y) = Z$

$$g(Y) \subset Z, \text{ weil } g : Y \rightarrow Z \text{ Abbild} \quad (\#)$$

$$Z = (g \circ f)(X) \underbrace{=}_{g \circ f \text{ surj.}} g(\underbrace{f(X)}_{\subset Y \text{ weil } f: X \rightarrow Y \text{ Abb.}}) \subset g(Y) \quad (\#)$$

Aus (1) und (2) folgt nach 0.5a $g(Y) = Z$.

0.24 Umkehrfunktion

Eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ heißt Umkehrfunktion oder Umkehrdarstellung zu $f : X \rightarrow Y$, wenn gilt:

$$g \circ f = \text{id}_X, \text{ d.h. } g(f(x)) = x (x \in X)$$

und

$$f \circ g = \text{id}_Y, \text{ d.h. } f(g(y)) = y (y \in Y)$$

Falls f eine Umkehrabbildung besitzt, ist diese eindeutig bestimmt und bijektiv (Bezeichnung f^{-1}). In diesem Fall ist f ebenfalls bijektiv.

Beweis

1. Zeige: f, g bijektiv

$$\text{id}_X \text{ bijektiv} \Rightarrow g \circ f \text{ bijektiv} \stackrel{0.23}{\Rightarrow} f \text{ injektiv, } g \text{ surjektiv}$$

$$\text{id}_Y \text{ bijektiv} \Rightarrow f \circ g \text{ bijektiv} \stackrel{0.23}{\Rightarrow} g \text{ injektiv, } f \text{ surjektiv}$$

d.h. f und g bijektiv

2. Zeige: g ist eindeutig bestimmt

Seien g_1, g_2 Umkehrabbildungen zu f . Dann gilt:

$$g_1(f(x)) = x$$

$$g_2(f(x)) = x$$

für $g_1 \circ (f(x)) = g_2(f(x)) \quad (x \in X)$

Wegen $f(x) = y$ (denn f surjektiv, weil nach 1. bijektiv) gibt es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $y = f(x)$

Daher: $g_1(y) = g_2(y) \quad (y \in Y)$, also: $g_1 = g_2$

0.25 Satz

Es gilt:

- (a) $f : X \rightarrow Y$ bijektiv $\Leftrightarrow f$ besitzt eine Umkehrabbildung
- (b) $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, $B \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$
- (c) $f : X \rightarrow Y$ bijektiv $\Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$
- (d) $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, $g : Y \rightarrow Z$ bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Beweis

- (a) „ $\Leftarrow$ “ : Satz 0.24

„ $\Rightarrow$ “ f surjektiv, d.h. $f(x) = y$, daher $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$

– Grafik 0.25-01 –

Es gilt sogar:

$$\forall y \in Y \quad \exists! x \in X : f(x) = y \quad (*)$$

Somit definiert $(*)$ eine Abbildung

$$g : Y \rightarrow X, \quad \underbrace{y \mapsto x \text{ mit } f(x) = y}_{g(y)=x}$$

Hieraus folgt:

$$y = f(x) = f(g(y)) \quad (y \in Y)$$

und

$$x = g(y) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

Das heißt: g ist Umkehrabbildung von f .

- (b)

$$\begin{aligned} f^{-1}(B) &= \{x \in X : \exists y \in B : y = f(x)\} \\ &\stackrel{f \text{ bijek.}}{=} \{x \in X : \exists y \in B : f^{-1}(y) = x\} \\ &= \{f^{-1}(y) : y \in B\} = f^{-1}(B) \end{aligned}$$

(c)

$$f \text{ bijektiv} \stackrel{0.25, 0.24}{\Rightarrow} \begin{aligned} f \circ f^{-1} &= id_Y \\ f^{-1} \circ f &= id_X \end{aligned}$$

Also ist f Umkehrfunktion zu f^{-1} und da diese eindeutig bestimmt ist, gilt $(f^{-1})^{-1} = f$

(d)

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) &= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = x \quad (x \in X) \\ (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(z) &= g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z \quad (z \in Z) \end{aligned}$$

Somit ist $f^{-1} \circ g^{-1}$ Umkehrfunktion zu $g \circ f$, d.h.

$$(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$$

Nach 0.24 ist $g \circ f$ bijektiv.

1 Reelle Zahlen

10.11.2009

Wir setzen die reellen Zahlen als gegeben voraus und formulieren einige Grundannahmen (Axiome), von denen die weiteren Eigenschaften abgeleitet werden. Diese lassen sich in die drei Gruppen Körperaxiome, Anordnungsaxiome und Vollständigkeitsaxiome gliedern.

Körperaxiome

Auf der Menge $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen gegeben

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y \quad (\text{bzw. } xy)$$

die folgende Regeln (Axiome) erfüllen:

(K1) Assoziativgesetze

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z), \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

(K2) Kommutativgesetze

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} x + y &= y + x, \\ x \cdot y &= y \cdot x \end{aligned}$$

(K3) Existenz und Eindeutigkeit der neutralen Elemente 0 und 1, $0 \neq 1$ mit

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : \quad x + 0 &= x \\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot 1 &= x \end{aligned}$$

(K4) Existenz und Eindeutigkeit der inversen Elemente

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists_1 y \in \mathbb{R} : \quad x + y &= 0 \quad (\text{Bez. } -x) \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \underbrace{\exists_1}_{\text{exist. genau 1}} y \in \mathbb{R} : \quad x \cdot y &= 1 \quad (\text{Bez. } x^{-1}) \end{aligned}$$

(K5) Distributivgesetz

$$\forall_{x,y,z \in \mathbb{R}} : \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Bemerkung

In (K3) und (K4) kann auf die Eindeutigkeit als Forderung verzichtet werden (lineare Algebra).

Mit Hilfe von (K4) lassen sich Subtraktion und Division erklären.

Wir setzen voraus, dass $\cdot$ stärker bindet als $+$ und haben deshalb in K5 die eigentlich erforderlichen Klammern auf der rechten Seite weggelassen.

1.1 Definition (Subtraktion und Division)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$

$$x - y := x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1} \quad , \text{ (falls } y \neq 0 \text{)}$$

Insbesondere: $\frac{1}{y} = y^{-1}$

1.2 Rechenregeln

Im Folgenden seien $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (a) $-(-x) = x, \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (x \neq 0)$
- (b) $-(x + y) = -x - y, \frac{1}{\frac{1}{xy}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$
- (c) $x \cdot y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$
- (d) $(-1) \cdot x = -x, (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$
- (e)

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = \frac{uy + vx}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

$$\frac{u}{x} - \frac{v}{y} = \frac{uy - vx}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

$$\frac{u}{x} \cdot \frac{v}{y} = \frac{uv}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

$$\frac{\frac{u}{x}}{\frac{v}{y}} = \frac{uy}{vx} \quad (x \neq 0, y \neq 0, v \neq 0)$$

Beweise

(a)

$$\begin{aligned} (-x) + x &\stackrel{K4}{=} x + (-x) \stackrel{K4}{=} 0 \\ (-x) + (-(-x)) &\stackrel{K4}{=} 0 \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit des inversen Elements (K4) folgt $x = -(-x)$

Zweite Aussage analog.

(b)

$$\begin{aligned} x + y + (-x \underbrace{-y}_{+(-y)}) &\stackrel{Def.Subtr.}{=} x + y + ((-x) + (-y)) \\ &\stackrel{K4}{=} (x + (-x)) + (y + (-y)) \\ &\stackrel{K4}{=} 0 + 0 \\ &\stackrel{K3}{=} 0 \\ x + y + (-(x + y)) &\stackrel{K4}{=} 0 \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements

$$-x - y = -(x + y)$$

Zweite Aussage analog.

(c) „ $\Leftarrow$ “ Zeige:

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \\ x \cdot 0 + x \cdot 0 &\stackrel{K5}{=} x \cdot (0 + 0) \stackrel{K3}{=} x \cdot 0 \\ x \cdot 0 + 0 &\stackrel{K3}{=} x \cdot 0 \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit des neutralen Elements der Addition folgt $x \cdot 0 = 0$. Wegen $0 \cdot x = x \cdot 0 \stackrel{soeb. bew.}{=} 0$ ergibt sich „ $\Leftarrow$ “.

„ $\Rightarrow$ “: Sei $x \cdot y = 0$. Zu zeigen: $x = 0 \vee y = 0$.

Fall $x \neq 0$, dann gilt

$$y \stackrel{K3+2}{=} 1 \cdot y \stackrel{K4}{=} (x \cdot x^{-1}) \cdot y \stackrel{K2}{=} (x^{-1} \cdot x) \cdot y \stackrel{K1}{=} x^{-1} \cdot (x \cdot y) \stackrel{Voraus.}{=} x^{-1} \cdot 0 \stackrel{K4}{=} 0.$$

(„ $\Leftarrow$ “ ist bereits bewiesen.)

Falls $x = 0$ sind wir ohnehin mit dem Beweis fertig.

$$\begin{aligned} \text{(d) } x + (-1) \cdot x &\stackrel{K3+2}{=} (1 \cdot x) + (-1) \cdot x = x \cdot 1 + x \cdot (-1) \stackrel{K2}{=} x \cdot (1 + (-1)) = x \cdot 0 \stackrel{(c)}{=} \\ 0x + (-x) &\stackrel{K4}{=} 0 \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit des inversen Elements (K4) folgt

$$\begin{aligned} -x &= (-1) \cdot x \\ (-x) \cdot (-y) &= ((-1) \cdot x) \cdot ((-1) \cdot y) \stackrel{K1,2}{=} ((-1) \cdot (-1)) \cdot (x \cdot y) \\ -(-1) \cdot (x \cdot y) &\stackrel{(a)}{=} 1 \cdot (x \cdot y) \stackrel{K2,3}{=} x \cdot y \end{aligned}$$

(e) evtl. Übungsaufgabe

1.3 Summen-, Produkt- und Potenzschreibweise

- (a) Durch wiederholte Anwendung des Assoziativgesetzes (K1) erhält man, dass in der Summe $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ bzw. im Produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ die Klammern beliebig gesetzt werden können, weshalb sie oft weggelassen werden.

Schreibweise

$$\sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \sum_{i=1}^0 x_i := 0 \quad (\text{leere Summe})$$

$$\prod_{i=1}^n x_i := x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \prod_{i=1}^0 x_i := 1 \quad (\text{leeres Produkt})$$

$$x^n := \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_n = \prod_{i=1}^n x \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$x^0 := 1 (\text{auch } 0^0 := 1); \quad x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}, x \neq 0)$$

Verallgemeinerung

$$\sum_{i=m}^n x_i := \begin{cases} x_m + x_{m+1} + \dots + x_n & (m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n) \\ 0 & (m, n \in \mathbb{Z}, m > n) \end{cases}$$

$$\prod_{i=m}^n x_i := \begin{cases} x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_n & (m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n) \\ 1 & (m, n \in \mathbb{Z}, m > n) \end{cases}$$

Folgerungen

(1)

$$\sum_{i=\ell}^n x_i = \left(\sum_{i=\ell}^m x_i \right) + \left(\sum_{i=m+1}^n x_i \right) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}, l \leq m \leq n)$$

(2)

$$\prod_{i=l}^n x_i = \left(\prod_{i=l}^m x_i \right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^n x_i \right) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}, l \leq m \leq n)$$

(3)

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^{m+n} & (m, n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}) \\ (x^m)^n &= x^{m \cdot n} \\ (x \cdot y)^n &= x^n \cdot y^n \end{aligned}$$

(b) Wiederholte Anwendung des Kommutativgesetzes (K2) liefert für jede bijektive Abbildung $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

(4)

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_{\varphi(i)}$$

Beispiel

$$\varphi(i) = n + 1 - i$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_{n+1-i} \quad [x_1 + \dots + x_n = x_n + x_{n-1} + \dots + x_1]$$

Verallgemeinerung

$$\varphi : \{m^*, m^* + 1, \dots, n^*\} \rightarrow \{m, m + 1, \dots, n\} \text{ bijektiv}$$

$$\sum_{i=m}^n x_i = \sum_{i=m^*}^{n^*} x_{\varphi(i)}$$

Beispiel

$$\varphi : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, \dots, n, \varphi(i) = i + 1\}$$

(6)

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \quad \text{Indexverschiebung}$$

Eine weitere Anwendung des Kommutativgesetzes liefert

(7)

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

Verallgemeinerung

(8)

$$\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)$$

$$\begin{array}{llllll} s_{1:} = & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & = \sum_{j=1}^n a_{1j} \\ s_{2:} = & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & = \sum_{j=1}^n a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n:} = & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & = \sum_{j=1}^n a_{mj} \end{array}$$

$$=$$

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m a_{i1} \quad \sum_{i=1}^m a_{i2} \quad \dots \quad t_m$$

$$\sum_{j=1}^n t_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

Aus der Gleichheit $\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n t_j$ folgt (8).

16.11.2009

(c) Wiederholte Anwendung des Distributivgesetzes führt auf

(9)

$$\lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda \cdot x_i$$

$$[\lambda(x_1 + \cdots + x_n) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + \cdots + \lambda x_n]$$

Verallgemeinerung

(10)

$$\left(\sum_{i=1}^m x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_i y_j \right) \stackrel{(8)}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_i y_j \right)$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j\right) &= x_1 \cdot \sum_{j=1}^n y_j + x_2 \cdot \sum_{j=1}^n y_j + \cdots + x_n \cdot \sum_{j=1}^n y_j \\
&\stackrel{(9)}{=} \underbrace{\sum_{j=1}^n x_1 y_j}_{=:s_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^n x_2 y_j}_{=:s_2} + \cdots + \sum_{j=1}^n x_m y_j \\
&= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_i y_j\right)
\end{aligned}$$

- (d) In der Rechnerarithmetik gelten Assoziativ- und Distributivgesetze im allgemeinen *nicht*:

Es gibt Maschinenzahlen mit $\delta \neq 0$ mit $1 \oplus \delta = 1$, $a \oplus b := \underbrace{\text{rd}}_{\text{Rundung}}(a+b)$
Gleitpunktaddition

dann:

$$\begin{aligned}
(\delta \oplus 1) \oplus (-1) &= 0 \\
\delta \oplus \underbrace{(1 \oplus (-1))}_0 &= \delta
\end{aligned}$$

In den gängigsten Programmiersprachen ist der Additionsoperator linksassoziativ, d.h. $a + b + c$ wird als $(a + b) + c$ ausgewertet.

Beispiel

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1} \quad (*)$$

Erster Beweis durch Ausschreiben der Summe:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) &= (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots \\
+ (a_{n-2} - a_{n-1}) + (a_n - a_{n+1}) &= a_0 - a_{n+1}
\end{aligned}$$

1 Reelle Zahlen

Zweiter Beweis durch Anwendung der Rechenregeln für Summen:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) &= \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n a_{k+1} \\
 &= \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \right) - \left(\left(\sum_{l=1}^{n-1} a_{k+1} \right) + a_{n+1} \right) \\
 &\stackrel{\text{Indexversch.}}{=} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k - \left(\sum_{l=1}^{(n-1)+1} a_l + a_{n+1} \right) \\
 &= a_0 - a_{n+1}
 \end{aligned}$$

Veranschaulichung:

$$\sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^n a_{k+1} = \begin{pmatrix} a_0 & +a_1 & +\dots & +a_n \\ & a_1 & +\dots & +a_n & +a_{n+1} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Aus (*) folgt sofort

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 \quad (**)$$

2. Es gilt

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n (2k+1) &= \sum_{k=0}^n \left[(k+1)^2 - k^2 \right] \quad (**) \\
 &= (n+1)^2 - 0^2
 \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) = \sum_{k=0}^n 2k + 1 + \sum_{k=0}^n 1 = 2 \cdot \sum_{k=0}^n k + (n+1)$$

sonst:

$$2 \cdot \sum_{k=0}^n k + (n+1) = (n+1)^2$$

d.h.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.4 Binomischer Satz

Sei $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis

Multipliziert man aus, ohne das Kommutativgesetz der Multiplikation zu verwenden, so erhält man 2^n Summanden der Gestalt $z_1 \cdots z_n$, wobei $z_i \in \{x, y\}$.

Beispiel:

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) \\ &= xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy \\ &\rightarrow 2^3 \text{ Summanden} \\ &\rightarrow \binom{3}{1} \text{ Summanden, in denen } x \text{ einfach vorkommt} \end{aligned}$$

Jedem Summanden entspricht genau ein n -Tupel $(z_1, \dots, z_n) \in \{x, y\}^n$.

Nach 0.14(e) gibt es genau $\binom{n}{k}$ n -Tupel, in denen x k -fach und y $(n-k)$ -fach vorkommt, also gibt es $\binom{n}{k}$ Summanden, des Werts $x^k y^{n-k}$.

1.5 Geometrische Summenformel

(a) Sei $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= (x - y) \cdot \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k \\ &= (x - y) \cdot \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \end{aligned}$$

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Beweis

(a)

$$\begin{aligned} (x - y) \cdot \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} &= \sum_{k=0}^n (x - y) \cdot x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\underbrace{x^{k+1} y^{n-k}}_{:=a_{k+1}} - \underbrace{x^k y^{n+1-k}}_{:=a_k} \right) \\ &= x^{n+1} \cdot y^{n-n} - x^0 y^{n-(0-1)} = x^{n+1} - y^{n+1} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt mit der Indextransformation

$$\zeta(k) = n - k$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}}_{k \in \{0, \dots, n\}} \underset{l=n-k}{=} \sum_{l=0}^n x^{n-l} \underbrace{y^{n-(n-l)}}_{y^l} \underset{\text{Bewegung der Indizes unbed.}}{=} \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$$

(b) folgt aus (a) mit $x = 1, y = q$.

$$1 - q^{n+1} = (1 - q) \sum_{k=0}^n \underbrace{1^{n-k}}_1 q^k$$

1.6 Definition (Polynom vom Grad n)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Die Funktion $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ wird als Polynom bezeichnet. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n Grad des Polynoms (Bez.: $\text{grad } p$) und a_n Höchstkoeffizient.

$\xi \in \mathbb{R}$ heisst Nullstelle von p , wenn $p(\xi) = 0$

Bemerkung: Das Nullpolynom, definiert durch $p(x) := 0$ ($x \in \mathbb{R}$), zählt zu den Polynomen und erhält den Grad -1.

$[P_n := \{p: p \text{ Polynom vom Grad } \leq n\}]$ soll auch das Nullpolynom enthalten.]

1.7 Satz

- (a) Sei p ein Polynom von Grad $n \geq 1$ und ζ eine Nullstelle von p . Dann gibt es ein Polynom q mit $\text{Grad } q = n - 1$, so dass

$$p(x) = (x - \zeta) \cdot q(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

- (b) Jedes Polynom von Grad n lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \xi)^{m_1} \dots (x - \xi_\ell)^{m_\ell} \cdot q(x) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{\ell} (x - \xi_i)^{m_i} \right) \cdot q(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \dots, \xi_\ell \in \mathbb{R}$ und $q(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Außerdem gilt $\text{grad } p = m_1 + \dots + m_\ell + \text{grad } q$.

- (c) Jedes Polynom von Grad $n \geq 0$ besitzt höchstens n verschiedene Nullstellen.
- (d) Falls zwei Polynome $\sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ und $\sum_{k=0}^n b_k \cdot x^k$ an mindestens $n + 1$ Stellen übereinstimmen, dann gilt $a_k = b_k$ für alle $k = 0, \dots, n$.

Beweis

(a)

$$\begin{aligned}
 p(x) &= p(x) - p(\zeta) \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k - \sum_{k=0}^n a_k \zeta^k \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k (x^k - \zeta^k) \\
 &= a_0(x^0 - \zeta^0) + \sum_{k=1}^n a_k (x^k - \zeta^k) \\
 &\stackrel{1.5}{=} \sum_{k=0}^n a_k \cdot (x - \zeta) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x^i \zeta^{k-1-i} \\
 &= (x - \zeta) \cdot \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i \zeta^{k-1-i} \\
 &= (x - \zeta) \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^{k-1} a_k x^l \zeta^{k-1-l}}_{q(x)}
 \end{aligned}$$

Noch zu zeigen: q Polynom vom Grad $n-1$.

17.11.2009

Zu zeigen:

$$q(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{a_k \zeta^{k-1-i} x^i}_{\alpha_{ik}}$$

ist Polynom von Grad n .

	k = 1	k = 2	...	k	k = n
i = 0	α_{01}	α_{02}		α_{0k}	α_{0n}
i = 1		α_{12}		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$				$\alpha_{k-1,k}$	$\vdots$
i = n-1					$\alpha_{n-1,n}$

Statt das Tableau zuerst spaltenweise zu summieren, wird es jetzt zeilenweise sum-

1 Reelle Zahlen

miert. Zeilenweise Summerierung ergibt:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \underbrace{a_k \xi^{k-1-i} \cdot x^i}_{\alpha_{ik}} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{k=i+1}^n a_k \xi^{k-1-i} \right)}_{b_k :=} x^i \\
 q(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \text{ mit} \\
 b_{n-1} &= \sum_{k=(n-1)+1}^n a_k \xi^{k-1-(n-1)} \\
 &= a_n \cdot \xi^0 \neq 0
 \end{aligned}$$

d.h. $\text{grad } q = n - 1$.

Andere Begründung der Summenvertauschung:

$$\begin{aligned}
 1 \leq k \leq n \quad \wedge \quad 0 \leq i \leq k-1 & \quad (\text{entspricht } \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1}) \\
 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq n \quad \wedge \quad 1 \leq i+1 \leq k \\
 \Leftrightarrow 1 \leq i+1 \leq k \leq n \\
 \Leftrightarrow 1 \leq i+1 \leq n \quad \wedge \quad i+1 \leq k \leq n \\
 \Leftrightarrow 0 \leq i \leq n-1 \quad \wedge \quad i+1 \leq k \leq n & \quad (\text{entspricht } \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n)
 \end{aligned}$$

(b) Falls p keine Nullstelle ξ besitzt, dann gilt der Satz mit $\ell = 0$ und $q = p$.

Falls p eine Nullstelle ξ besitzt, dann gilt $\text{grad } p \geq 1$.

[Polynome vom Grad 0 haben die Gestalt $p = a_0 \neq 0$ und daher keine Nullstellen.]

Wiederholte Anwendung von (a) liefert die Aussage:

(c) Weitere Nullstellen, als die in der Darstellung (b) aufgeführten gibt es nicht, weil nach (b)

$$\begin{aligned}
 p(x) &\neq 0 \quad x \notin \{\xi_1, \dots, \xi_l\} \\
 \left[p(x) &= \underbrace{(x - \xi)^{m_1}}_{\neq 0} \dots \underbrace{(x - \xi_l)^{m_l}}_{\neq 0} \cdot \underbrace{q(x)}_{\neq 0} \quad x \notin \{\xi_1, \dots, \xi_l\} \right]
 \end{aligned}$$

(d) betrachte

$$r(x) = p(x) - q(x) = \sum_{k=0}^n (a_k - b_k)x^k$$

Nach Voraussetzung hat r mindestens $n + 1$ verschiedene Nullstellen.

Falls für ein k $a_k \neq b_k$ gilt, dann folgt $\text{grad } r \geq 0$. Nach Darstellung gilt ohnehin $\text{grad } r \leq n$. Nach (c) hat r also höchstens n Nullstellen. *Widerspruch!*

Somit gilt $a_k = b_k$ ($k = 0, \dots, n$).

Anordnungsaxiome

Bestimmte Elemente von $\mathbb{R}$ werden als positiv bezeichnet (Schreibweise: $x > 0$).

Dabei gelten folgende Axiome:

(A1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist genau eine der folgenden Aussagen

$$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0$$

wahr.

(A2)

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$$

(A3)

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$$

1.8 Definition

Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x > y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y > 0$$

$$x \geq y \quad :\Longleftrightarrow \quad x > y \vee x = y$$

$$x < y \quad :\Longleftrightarrow \quad y > x$$

$$x \leq y \quad :\Longleftrightarrow \quad x < y \vee x = y$$

1.9 Rechenregeln (Auszug)

Seien $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1 Reelle Zahlen

(a)

$$x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z \quad (\text{Transitivitat})$$

(b)

$$\begin{aligned} x > y &\Leftrightarrow x + a > y + a \\ x > y \wedge a > b &\Rightarrow x + a > y + b \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x > y \wedge a > 0 &\Rightarrow a \cdot x > a \cdot y \\ x > y \wedge a < 0 &\Rightarrow a \cdot x < a \cdot y \end{aligned}$$

(d)

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \quad (\text{insbesondere } 1 > 0)$$

(e)

$$\underbrace{x > y \wedge y > 0}_{x > y > 0} \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0$$

Beweis

(a) Sei $x > y$ und $y > z$, d.h. $x - y > 0$ und $y - z > 0$. Nach (A2):

$$\underbrace{(x - y) + (y - z)}_{x - z} > 0$$

d. h. $x - z > 0$ bzw. $x > z$.

(b) $x > y \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} x - y > 0 \Leftrightarrow (x + a) - (y + a) > 0 \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} x + a > y + a$

Zweite Ungleichung analog.

(c) Sei $x > y$ und $a > 0$. Dann $x - y > 0$ und $a > 0$, also nach (A3) $(x - y) \cdot a > 0$.
Sonst $ax - ay > 0$, d.h. $ax > ay$.

Sei $x > y$ und $a < 0$. Dann $x > y \wedge (-a) > 0$.

Also nach (c)

$$\begin{aligned} \underbrace{(-a)x}_{-ax} &> (-a)y \\ -ax &> -ay \end{aligned}$$

Nach (b) durch Addition von $a(x + y)$ ergibt sich

$$\underbrace{-ax + a(x + y)}_{a \cdot y} > \underbrace{-ay + a(x + y)}_{a \cdot x}$$

- (d) 1.Fall: $x > 0$. Dann nach (A3) $x \cdot x > 0$
 2.Fall: $x < 0$. Dann $-x > 0$, also $\underbrace{(-x)(-x)}_{x \cdot x} > 0$

- (e) Sei $x > 0$. Dann

$$\frac{1}{x} = \underbrace{x}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^2}_{>0 \text{ nach (a)}} > 0$$

Sei $x > y > 0$. Nach (A2) folgt $x \cdot y > 0$. Wegen des soeben bewiesenen $\frac{1}{xy} > 0$.
 Hieraus wegen $x > 0$ und (c)

$$x \cdot \frac{1}{xy} > y \cdot \frac{1}{xy}, \text{ also } \frac{1}{y} > \frac{1}{x}.$$

1.10 Definition (Betrag von x)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann $|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

[Beispiel: $|2| = 2$, $|-2| = -(-2) = 2$]

1.11 Folgerungen

Sei $x \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$. Dann gilt

- (a)

$$|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- (b)

$$\begin{aligned} |x| \leq M &\Leftrightarrow -M \leq x \leq M \\ |x| < M &\Leftrightarrow -M < x < M \\ -|x| &\leq x \leq |x| \end{aligned}$$

- (c)

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

- (d)

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (\text{falls } y \neq 0)$$

Beweis

(a) $|x| \geq 0$ klar nach Definition, ebenso $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \Rightarrow |-x| = 0 \\ x & \text{falls } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{falls } (-x) > 0 \\ 0 & \text{falls } (-x) = 0 \\ -(-x) & \text{falls } (-x) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow |-x| = \begin{cases} -x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ x & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

(b) „ $\Rightarrow$ “ Sei $|x| \leq M$:

1. Fall: $x \geq 0$. Dann $x = |x| \leq M$, also $0 \leq x \leq M$, sonst $-M \leq x \leq M$
2. Fall: $x < 0$. Dann $-x = |x| \leq M$, also $0 \leq -x \leq M$ bzw. $-M \leq x \leq M$ und daher: $-M \leq x \leq M$.

„ $\Leftarrow$ “

Sei $-M \leq x \leq M$.

1. Fall: $x \geq 0$. Dann $|x| = x \leq M$.
2. Fall: $x < 0$. Dann $|x| = -x \leq -(-M) = M$.

Die letzte Ungleichung folgt mit $M = |x|$ aus der ersten Ungleichung.

Die zweite Ungleichung wird analog zur ersten bewiesen.

(c) 4 Fallunterscheidungen

1. $x \geq 0, y \geq 0$: $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$
2. $x \geq 0, y < 0$: $|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$
3. $x < 0, y \geq 0$
4. $x < 0, y < 0$ usw.

(d) $x = \frac{x}{y} \cdot y$, also nach (?) $|x| = \left| \frac{x}{y} \right| \cdot |y|$
 $\Leftrightarrow \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$

1.12 Satz (Dreiecksungleichung)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$
- (b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Beweis

(a) Nach 1.11.b

$$\begin{aligned} -|x| \leq x &\leq |x| \\ -|y| \leq y &\leq |y| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -||x+y|| &\Rightarrow \leq x+y \leq |x|+|y| \\ \stackrel{1.11b}{\Leftrightarrow} |x+y| &\leq |x|+|y| \end{aligned}$$

(b) Zu zeigen:

$$-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$$

Die linke Ungleichung folgt aus

$$\begin{aligned} |y| &= |x+(y-x)| \stackrel{(a)}{\leq} |x|+|y-x| \\ &= |x|+|-(y-x)| = |x|+|x-y| \end{aligned}$$

und die rechte Ungleichung ergibt sich aus

$$|x| = |y+(x-y)| \stackrel{(a)}{\leq} |y|+|x-y|$$

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

1.13 Definition (min M, max M)

Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann heißt $m \in M$ kleinstes bzw. größtes Element von M , wenn gilt:

$$\begin{aligned} \forall a \in M &: m \leq a \\ \forall a \in M &: a \leq m \end{aligned}$$

Bezeichner: min M bzw. max M.

23.11.2009

Bemerkung:

1. min M und max M sind jeweils eindeutig bestimmt, wenn sie existieren.
[Denn: m, m' kleinste Elemente von $M \Rightarrow m \leq m' \wedge m' \leq m \rightarrow m = m'$]

2. $\min M$ und $\max M$ brauchen nicht zu existieren, sogar wenn M eine beschränkte Menge ist.

Bsp.: $M = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ [Beweis später]

1.14 Lemma

Sei $M < N$, $M \neq \emptyset$. Dann existiert $\min M$.

Beweis: Durch Rückführung auf endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$.

$M \neq \emptyset$, dann gibt es ein $m \in M$

1. Fall: m kleinstes Element von M , d.h.
 $\forall a \in M : m \leq a$
2. Fall: m nicht kleinstes Element von M , d.h.
 $\exists a \in M : m > a$

Betrachte:

$$A := \{a \in M : a < m\} \subset \{1, 2, \dots, m\}$$

$$B := \{a \in M : a \geq m\}$$

A und B sind nicht leere Teilmengen von $\mathbb{N}$, $M = A \cup B$.

Wegen $A \neq \emptyset$ und A endlich existiert nun $\min A$.

Nach Konstruktion ist $\min A$ kleinstes Element von M .

[z.z.: $\min A \leq a$ ($a \in M$)

1. Fall: $a \in A$: klar
2. Fall: $a \in B$: $\min A \leq m \leq a$

1.15 Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage.

Sofern:

$$\mathcal{A}(1) \text{ wahr ist (Induktionsanfang)}$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1) \text{ wahr ist (Induktionsschluss)}$$

dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{A}(n)$ wahr

$$\left[\begin{array}{l} \mathcal{A}(1) \text{ wahr} \wedge \mathcal{A}(1) \Rightarrow \mathcal{A}(2) \text{ wahr, also } \mathcal{A}(2) \text{ wahr} \\ \mathcal{A}(2) \text{ wahr} \wedge \mathcal{A}(2) \Rightarrow \mathcal{A}(3) \text{ wahr, also } \mathcal{A}(3) \text{ wahr} \\ \vdots \end{array} \right]$$

Beweis: Wir betrachten die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}(n) \text{ falsch}\}$

Annahme: $M \neq \emptyset$

Nach Lemma 1.14 besitzt M ein kleinstes Element $m \in \mathbb{N}$.

1. Fall: $m = 1$: Dann wäre $\mathcal{A}(1)$ falsch $\rightarrow$ Widerspruch zum Induktionsanfang
2. Fall: $m > 1$: Dann $m - 1 \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}(m - 1)$ wahr.
Aus der Richtigkeit von $\mathcal{A}(m - 1) \Rightarrow \mathcal{A}(m)$ (*Induktionsschluss*), folgt $\mathcal{A}(m)$ wahr.
Widerspruch!

Also gilt $M = \emptyset$ und daher $\forall n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}(n)$ wahr.

Bemerkung:

1. Der Induktionsschluss kann bewiesen werden, indem $\mathcal{A}(n)$ als wahr vorausgesetzt wird (Induktionsannahme) und die Richtigkeit von $\mathcal{A}(n + 1)$ gefolgert wird.
2. Das Prinzip der vollständigen Induktion verallgemeinert sich auf die folgende Situation:

$\mathcal{A}(n_0)$ wahr für ein $n_0 \in \mathbb{Z}$ (*Induktionsanfang*)

$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : (\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n + 1))$ wahr (*Induktionsschluss*)

Dann ist $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : \mathcal{A}(n)$ wahr

1.16 Bernoullische Ungleichungen

Sei $x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$

Bemerkung: Für $x \geq 0$ folgt die BERNOULLI-Ungleichung sofort aus dem Binomischen Satz.

Beweis: Vollständige Induktion:

$$\mathcal{A}(n) \quad \underbrace{:\Leftrightarrow}_{\text{def. durch}} \quad (1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

$$\mathcal{A}(0) \text{ ist wahr, weil } \underbrace{(1 + x)^0}_{=1} \geq \underbrace{1 + 0 \cdot x}_{=1}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1) : & \quad (1+x)^{n+1} \\
& = (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{0 \text{ wg. } x \geq -1} \\
& \geq (1+nx)(1+x) \\
& = 1+nx+x+nx^2 \\
& = 1+(n+1) \cdot x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\
& \geq 1+(n+1)x \quad (\text{Induktionsschluss})
\end{aligned}$$

Eine weitere Variante des Induktionsprinzips lässt sich wie folgt formulieren:

Die Aussage $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 : \mathcal{A}(n)$ ist wahr, wenn gezeigt wird:

$\mathcal{A}(n_0)$ ist wahr (Induktionsanfang)

$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$

$\mathcal{A}(n_0) \wedge \mathcal{A}(n_0+1) \wedge \dots \wedge \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ ist wahr (Induktionsschluss)

1.17 Potenzsummen

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $S_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $S_k(n) = \sum_{i=0}^n i^k$ ein Polynom (in n) vom Grad $k+1$ und es gilt:

$$(*) \quad S_k(n) = \frac{1}{k+1}((n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n)) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Beispiel:

$$S_0(n) = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{-mal}} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{1}((n+1)^1 - 1 - \underbrace{\sum_{j=0}^{-1} \binom{1}{j} S_j(n)}_0) = n$$

$$S_1(n) = 1+2+\dots+n = \frac{1}{2}((n+1)^2 - 1 - \underbrace{\sum_{j=0}^0 \binom{2}{j} S_j(n)}_{\underbrace{\binom{2}{0} S_0(n)}_n}) = \frac{1}{2}(n^2 + 2n - n) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

Bemerkung: Obwohl S_k nur auf $\mathbb{N}$ definiert ist, sprechen wir von einem Polynom, da zwischen den Polynomfunktionen auf $\mathbb{N}$ und den Polynomfunktionen auf $\mathbb{R}$ eine bijektive Beziehung besteht (Satz 1.7d).

Beweis: (*) Übungsaufgabe

$\mathcal{A}(k) :\Leftrightarrow S_k$ ist ein Polynom vom Grad $k + 1$

$\mathcal{A}(0)$ ist wahr, weil $S_0(n) = n$ ($n \in \mathbb{N}$) [Polynom Grad 1]

$\mathcal{A}(0) \wedge \mathcal{A}(1) \wedge \dots \mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$

Aus (*) folgt

$$S_{k+1}(n) = \frac{1}{k+2} \left(\underbrace{(n+1)^{k+2}}_{\substack{\text{Polynom Grad } k+2 \\ \text{nach dem Binomischen Satz}}} - 1 - \sum_{j=0}^k \binom{k+2}{j} \underbrace{S_j(n)}_{\substack{\text{Polynom vom Grad} \\ j+1 \leq k+1}} \right)$$

Folgebegriff, reflexive Definition

Unter einer Folge von reellen Zahlen versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$.
(Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet)

Schreibweise: (a_n) $n \in \mathbb{N}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$

Ersetzt man $\mathbb{R}$ durch eine beliebige Menge X , so erhält man eine Folge von Elementen in X (Folge in X).

Beispiel:

(a) $a_n = a$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $a \in \mathbb{R}$ fest. $(a, a, \dots)$ konstante Folge.

(b) $a_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

(c) $a_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$) $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

(d) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= q \cdot a_n + r \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (q, r \in \mathbb{R}, q \neq 1) \\ a_0 &= 0 \\ a_1 &= r \\ a_2 &= q \cdot a_1 + r = (1+q) \cdot r \\ a_3 &= q \cdot a_2 + r = q \cdot (1+q) \cdot r + r = (1+q+q^2) \cdot r \\ &\text{Vermutung:} \\ a_n &= (1+q+\dots+q^{n-1}) \cdot r = \frac{q^n-1}{q-1} \cdot r \end{aligned}$$

(Beweis: Übungsaufgabe)

(e) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$)

$(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ FIBONACCI-Folge

[Es gibt eine geschlossene Formel, s. ÜA]

(f)

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, a_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} a_k \quad (n \in \mathbb{N}_0) \\
a_1 &= -\frac{1}{2} \binom{2}{0} a_0 = -\frac{1}{2} \\
a_2 &= -\frac{1}{3} \left(\binom{3}{0} a_0 + \binom{3}{1} a_1 \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{6} \\
(a_n)_{n \in \mathbb{N}} &\text{ Bernoulli-Zahlen (Bezeichnung: } B_n)
\end{aligned}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$

keine explizite Formel bekannt!

Mit den BERNOULLI-Zahlen erhält man Formeln für die Potenzsummen [ohne Beweis]

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k B_j \binom{k+1}{j} (n+1)^{k+1-j}$$

(g) $S_k(n)_{k \in \mathbb{N}_0}$ aus 1.17: Folge von Abbildungen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

In (d) bis (g) spricht man von der rekursiven Definition einer Folge. Dabei ist a_{n_0} für festes $n_0 \in \mathbb{Z}$ gegeben und eine Vorschrift, die sich a_{n+1} aus $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots, a_n$ erhalten lässt.

Formaler: Sei M eine Menge, $n_0 \in \mathbb{Z}$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ eine Abbildung.

$$f_n M^{n-n_0+1} \rightarrow M \text{ gegeben}$$

Durch

$$a_{n_0} \in M$$

und

$$\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 : a_{n+1} = f_n(a_0, \dots, a_n)$$

wird *genau eine Folge* $(a_n)_{n \geq n_0}$ definiert [ohne Beweis]

24.11.2009

(A4) Archimedisches Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : x > 0$$

[Hieraus folgt, dass es *kein* Element ∞ („unendlich“) in $\mathbb{R}$ gibt]

1.18 Folgerung

Es gilt:

- (a) zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $z \in \mathbb{Z}$, so dass $z \leq x < z + 1 : \forall x \in \mathbb{R} \exists_1 z \in \mathbb{Z} : z \leq x < z + 1$
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ (Satz des EUDOXOS)
- (c) Sei $\alpha > 0$. Dann $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$

Bemerkung

- 1. Das nach (a) zu $x \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmte $z \in \mathbb{Z}$ wird mit $[x]$ („Gauss-Klammer von x “) bezeichnet.
- 2. In (c) wird $[x]$ durch $\text{floor}(x)$ nachgebildet, allerdings liefert floor als Ergebnis eine Gleitpunktzahl (im Englischen $[x] \rightarrow \text{floor}$)
- 3. Aus (b) folgt später $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Beweis:

(a) Zeige Existenz:

- 1. Fall $x \in \mathbb{Z}$, wähle $x = 2$
- 2. Fall $x \notin \mathbb{Z}, x > 0$: Sei $M := \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$

Nach (A4) gilt $M \neq \emptyset$. Aus Lemma 1.14 folgt, dass $m := \min M$ existiert.

Behauptung: $m - 1 < x < m$.

Nach Konstruktion gilt: $x < m$.

$m - 1 < x$ ist äquivalent zu $m - x < 1$

Annahme: $m - x \geq 1$

Dann: $m - x > 1$, weil $x \notin \mathbb{Z}$

Also $x < m - 1$. Wegen $m - 1 > x > 0$ und $m \in \mathbb{N}$, folgt $m - 1 \in \mathbb{N}$.

Aus $x < m - 1$ ergibt sich dann $m - 1 \in M$, d.h. m ist nicht kleinstes Element von M . $\rightarrow$ *Widerspruch!*

Mit $Z := m + 1$ folgt (a).

- 3. Fall $x \in \mathbb{Z}, x < 0$

Nach dem 2. Fall gibt es $\tilde{z} \in \mathbb{Z}$, so dass $\tilde{z} < -x < \tilde{z} + 1$

d.h. $-\tilde{z} - 1 < x < -\tilde{z}$

wähle: $z := -\tilde{z} - 1$.

Zeige Eindeutigkeit:

Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 \leq x < z_1 + 1$ und $z_2 \leq x < z_2 + 1$

Dann

$$\left. \begin{array}{l} x - z_1 < 1 \wedge z_2 - x \leq 0, \text{ also } z_2 - z_1 < 1 \\ x - z_2 < 1 \wedge z_2 - x \leq 0, \text{ also } z_1 - z_2 < 1 \end{array} \right\} \text{ daher } z \in \mathbb{Z}$$

$|z_2 - z_1| < 1$. Sonst: $z_1 = z_2$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle in (A4) $x := \frac{1}{\varepsilon}$.

Dann existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Also gilt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$

(c) Sei $\varepsilon > 0$ und $\alpha > 0$. Wähle (A4) $x := \frac{\alpha}{\varepsilon}$.

Dann existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > \frac{\alpha}{\varepsilon}$, d.h. $\frac{\alpha}{n} < \varepsilon$.

Hieraus:

$$\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\alpha}{(1+1)^n} \leq \frac{\alpha}{n+1} < \frac{\alpha}{n} < \varepsilon$$

[BERNOULLI-Ungleichung: $(1+1)^n \geq 1 + n \cdot 1$]

Bezeichnung für Intervalle:

(a) Beschränkte Intervalle:

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$) abgeschlossenes Intervall

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) halboffenes Intervall

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) offenes Intervall

Wir ordnen allen diesen Intervallen die Länge $|J| = b - a$ zu.

(b) Uneingeschränkte Intervalle:

$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ ($a \in \mathbb{R}$) abgeschlossenes Intervall

$] -\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) abgeschlossenes Intervall

$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ ($a \in \mathbb{R}$) offenes Intervall

$] -\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) offenes Intervall

Bemerkung: Es gilt

$$\mathbb{R}_+ =]0, \infty[$$

$$\mathbb{R}_+ \cup \{0\} = [0, \infty[$$

$$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$$

1.19 Definition (Intervallschachtelung)

Sei (J_n) $n \in \mathbb{N}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle. Diese bildet eine Intervallschachtelung, wenn

- (i) $\forall n \in \mathbb{N} : J_{n+1} \subset J_n$
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |J_n| < \varepsilon$

— Grafik 1.19-01 —

Beispiel:

- (a) (J_n) $n \in \mathbb{N}$ mit $J_n = [0, \frac{1}{n}]$ ist eine Intervallschachtelung.

Es gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n = \{0\}$

- (b) Eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle (J_n) $n \in \mathbb{N}$, die (i) erfüllt und für die $|J_n| \leq \frac{\alpha}{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt, ist eine Intervallschachtelung.

Vollständigkeitsaxiom

- (v) Für jede Intervallschachtelung gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$$

d.h. $\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : x \in J_n$

Bemerkung: x ist eindeutig bestimmt, d.h. $\exists_1 x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : x \in J_n$

Denn: $x, \bar{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Annahme: $x \neq \bar{x}$
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\varepsilon}$

— Grafik 1.19-02 —

Setze $\varepsilon := \frac{1}{2} |x - \bar{x}|$ und wähle n so groß, dass $|J_n| < \varepsilon$.

$x, \bar{x} \in J_n \Rightarrow |x - \bar{x}| \leq |J_n| < \varepsilon = \frac{1}{2} |x - \bar{x}|$

Somit: $\frac{1}{2} |x - \bar{x}| < 0$. Widerspruch!

Betrachte 0,14159265...

$$\begin{aligned}
 J_1 & [0.1, 0.2] \\
 J_2 & [0.14, 0.15] \\
 J_3 & [0.141, 0.142] \\
 J_4 & [0.1415, 0.1416] \\
 J_5 & [0.14159, 0.14160] \\
 J_6 & [0.141593, 0.141593] \\
 |J_n| & = 10^{-n}
 \end{aligned}$$

1.20 B -adische Entwicklung (für reelle Zahlen $\in [0, 1[$)

Sei $B \in \mathbb{N}$, $B \geq 2$. Wir nennen $Z \in \{0, \dots, B-1\}$ eine Ziffer zur Basis B .

(a) Sei $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ziffern zur Basis B . Dann ist $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$J_n = \left[\sum_{k=1}^n Z_k \cdot B^{-k}, \sum_{k=1}^n Z_k \cdot B^{-k} + B^{-n} \right] \subset [0, 1]$$

eine Intervallschachtelung.

Die Folge

$$\left(\sum_{k=1}^n Z_k \cdot B^{-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

heißt B -adische Entwicklung der eindeutig bestimmten reellen Zahl $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$.

(Hierfür schreiben wir später $x = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \cdot B^{-k}$)

(b) Sei $0 \leq x < 1$. Dann besitzt x eine B -adische Entwicklung.

Beweis:

(a) $|J_n| = B^{-n} \leq 2^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$J_{n+1} \subset J_n \text{ wegen } \sum_{k=1}^{n+1} Z_k \cdot B^{-k} \geq \sum_{k=1}^n Z_k B^{-k}$$

$$\text{und } \sum_{k=1}^{n+1} Z_k \cdot B^{-k} + B^{-(n+1)} = \sum_{k=1}^n Z_k \cdot B^{-k} + \underbrace{Z_{n+1} B^{-(n+1)} + B^{-(n+1)}}_{\substack{(Z_{n+1} + 1) \cdot B^{-(n+1)} \\ \leq B}} \leq \sum_{k=1}^n Z_k B^{-k} +$$

B^{-n} .

Also ist $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung und es gibt ein eindeutig bestimmtes $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$.

$$\text{Wegen } J_n = \left[\underbrace{Z_1}_{\geq 0} B^{-1}, \underbrace{(Z_1 + 1)}_{\leq B} B^{-1} \right] \subset [0, 1] \text{ und } J_n < j_{n+1} \ (n \in \mathbb{N}) \text{ ergibt sich}$$

$$J_n \subset [0, 1] \ (n \in \mathbb{N})$$

(b) Wir betrachten die rekursiv definierten Folgen $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = x \\ Z_{k+1} = [B \cdot a_k] \\ a_{k+1} = B \cdot a_k - Z_{k+1} \end{array} \right\} (k \in \mathbb{N}_0)$$

$$\begin{aligned} x &= 0.14159265, \ B = 10 \\ a_0 &= 0.14159265 \\ z_1 &= [10 a_0] = [1.14159265] \\ &= 1 \\ a_1 &= 10 a_0 - Z_1 = 1.4159265 - 1 \\ &= 0.4159265 \\ z_2 &= [10 a_1] = 4 \end{aligned}$$

30.11.2009

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, (Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_0 = x \ [0 \leq x < 1]$

$$\left. \begin{array}{l} Z_{k+1} = [B a_k] \\ a_{k+1} = B a_k - \underbrace{Z_{k+1}}_{[B a_k]} \end{array} \right\} k \in \mathbb{N}_0$$

1. Aus $0 \leq y - [y] < 1$ und $0 \leq x < 1$ folgt $0 \leq a_k < 1 \ (k \in \mathbb{N}_0)$.

Somit $0 \leq \underbrace{[B a_k]}_{Z_{k+1}} < B$ d.h.

$$Z_{k+1} \in \{0, 1, \dots, B-1\} \ (k \in \mathbb{N}_0)$$

2. Zeige: $x = \underbrace{\sum_{k=1}^n Z_k B^{-k} + a_n B^{-n}}_{\mathcal{A}(n): \Leftrightarrow} \ (n \in \mathbb{N}_0)$

Vollständige Induktion:

$$\mathcal{A}(0) : \underbrace{\sum_{k=1}^0 Z_k B^{-k}}_{=0} + \underbrace{a_0}_{x} \underbrace{B^{-0}}_1 = x \quad \text{wahr}$$

$$\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1) :$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} Z_k B^{-k} + a_{n+1} \cdot B^{-(n+1)} &= \left(\sum_{k=1}^n Z_k B^{-k} + Z_{n+1} \cdot B^{-(n+1)} \right) + a_{n+1} \cdot B^{-(n+1)} = \sum_{k=1}^n Z_k B^{-k} + (Z_{n+1} + a_{n+1}) B^{-(n+1)} \\ &\stackrel{\mathcal{A}(n)(\text{Ind. Ann.})}{=} \sum_{k=1}^n Z_k B^{-k} + a_n \cdot B^{-n} \quad x = B \cdot a_n \quad (\text{s.o.}) \end{aligned}$$

3. Mit $0 \leq a_n < 1$ ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n Z_k B^{-k} \leq x \leq \sum_{k=1}^n Z_k B^{-k} + B^{-n}$$

d.h. $x \in I_n$.

Damit ist $\left(\sum_{k=1}^n Z_k B^{-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine B -adische Entwicklung von x .

Bemerkung: Im Fall $x \geq 1$ erhält man

$$x = \sum_{k=-k_0}^{\infty} Z_k B^{-k} \quad \text{für ein } k_0 \in \mathbb{N}_0$$

Das ergibt sich aus der Ungleichung

$$B^{k_0} \leq x < B^{k_0+1} \quad \text{und der Anwendung von 1.20 auf } \frac{x}{B^{k_0+1}}.$$

Auf Details wird verzichtet.

(Natürlich muss man $\sum_{k=-k_0}^{\infty} Z_k B^{-k}$ in die entsprechende Intervallschachtelung umschreiben. Nach Einführung des Begriffs der konvergenten unendlichen Reihe ist das nicht mehr notwendig.)

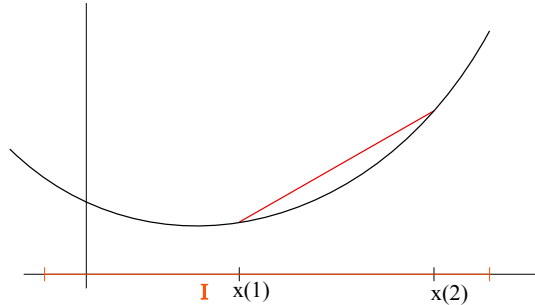
1.21 Definition (Lipschitzstetigkeit)

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lipschitzstetig, wenn

$$\exists L > 0 \forall x_1, x_2 \in I : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

L wird als Lipschitzkonstante bezeichnet.

Graphische Veranschaulichung



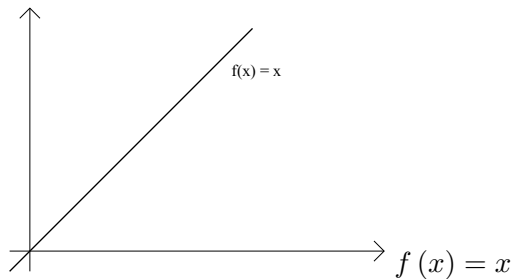
$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq L \quad (x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2)$$

Betrag der Sehnensteigungen ist durch L beschränkt. L unabhängig von x_1, x_2 !

Beispiel:

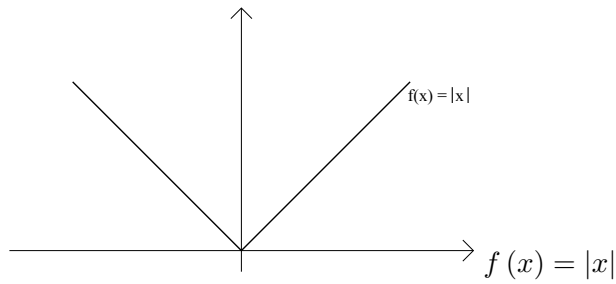
- (a) $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, denn $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq 1 \cdot |x_1 - x_2|$

Natürlich ist f auch lipschitzstetig mit jeder Lipschitzkonstante $L > 1$



- (b) $f(x) = |x|$ ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante 1, denn $|f(x_1) - f(x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \stackrel{1.12b}{\leq}_{(x_1, x_2 \in \mathbb{R})} |x_1 - x_2|$

1 Reelle Zahlen



(c) $f(x) = x^2$ ist lipschitzstetig auf beschränkten Intervallen $[a, b]$, denn:

$$\begin{aligned}
 |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\
 &= |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \\
 &= |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \\
 &\leq (\underbrace{|x_1| + |x_2|}_{\leq \max(|a|, |b|)}) \cdot |x_1 - x_2| \\
 &\leq 2 \cdot \max(|a|, |b|) \cdot |x_1 - x_2| \\
 &\leq \max(|a|, |b|)
 \end{aligned}$$

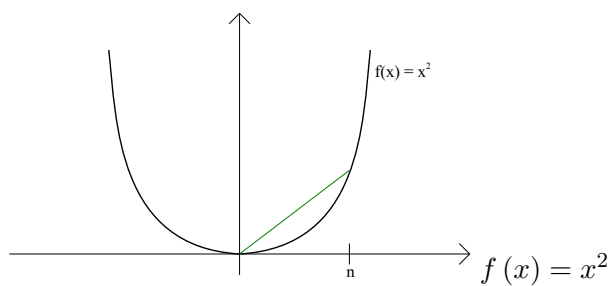
$f(x) = x^2$ ist nicht lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$, denn

$$\left| \frac{f(n) - f(0)}{n - 0} \right| = \frac{n^2}{n} = n \quad (n \in \mathbb{N})$$

Daher kann es keine Schranke für

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

geben.



(d) Verallgemeinerung: Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

$f(x) = x^k$ ist lipschitzstetig auf beschränkten Intervallen $[a, b]$.

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^k - x_2^k| \stackrel{15a}{=} \left| (x_1 - x_2) \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x_1^{k-1-i} x_2^i \right| = |x_1 - x_2| \cdot \left| \sum_{i=0}^{k-1} x_1^{k-1-i} x_2^i \right|$$

Dreiecksungleichung mehrfach

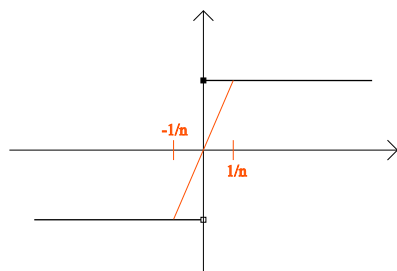
$$\leq |x_1 - x_2| \cdot \left| \sum_{i=0}^{k-1} x_1^{k-1-i} x_2^i \right| = |x_1 - x_2| \cdot \left| \sum_{i=0}^{k-1} |x_1|^{k-1-i} |x_2|^i \right| \stackrel{\leq}{|x_1|, |x_2| \leq \max(|a|, |b|)}$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{\max(|a|, |b|)^{k-1-i} \max(|a|, |b|)^i}_{\max(|a|, |b|)^{k-1}} = k \cdot \max(|a|, |b|)^{k-1} \cdot |x_1 - x_2|$$

Wie in (c) erhält man, dass f nicht lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$ ist.

$$(e) \quad f(x) \begin{cases} 1 \text{ für } x \geq 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases} \text{ ist nicht lipschitzstetig, denn}$$

$$\left| \frac{f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n}\right)} \right| = \left| \frac{1 - (-1)}{\frac{2}{n}} \right| = n \quad (n \in \mathbb{N})$$



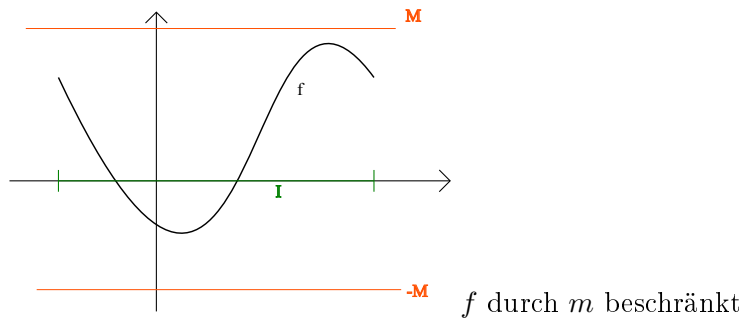
Bemerkung:

(a) Nach Einführung des allgemeinen Stetigkeitsbegriffs werden wir sehen, dass gilt:

f lipschitzstetig, $\Rightarrow f$ stetig

(b) I beschränktes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig $\Rightarrow f$ beschränkt, d.h.

$$\exists M > 0 \forall x \in I. |f(x)| \leq M$$

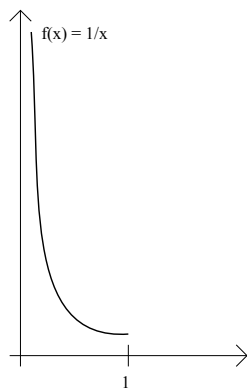


denn: Sei $c \in I$ fest. Dann

$$\begin{aligned}
 |f(x)| &= |f(x) - f(c) + f(c)| \\
 &\leq |f(x) - f(c)| + |f(c)| \\
 &\leq L(x - c) + |f(c)| \\
 &\leq L \underbrace{|I|}_{\text{Länge von } I} + |f(c)| := M \quad (x \in I)
 \end{aligned}$$

Beispiel für eine nicht beschränkte Funktion auf beschränktem Intervall:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (0 < x \leq 1)$$

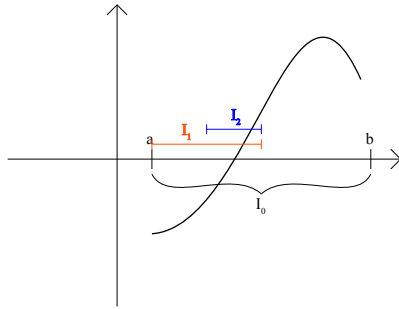


also nicht lipschitzstetig.

1.22 Zwischenwertsatz (Vorläufige Fassung)

Sei $I = [a, b]$ ein beschränkte Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei lipschitzstetig, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (oder umgekehrt $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann gibt es [mindestens] ein $x \in I$ mit $f(x) = 0$.

Skizze:



Beweis: Sei $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. (Andernfalls f durch $-f$ ersetzen)

Idee: Durch fortgesetzte Halbierung Intervalle $[a_n, b_n]$ konstruieren mit $f(a_n) \leq 0$, $f(b_n) > 0$. Rekursive Definition dieser Intervalle I_n :

$I_0 = [a_0, b_0]$ mit $a_0 := a$, $b_0 := b$ (Dann $f(a_0) \leq 0$ und $f(b_0) > 0$)

$I_n = [a_n, b_n]$ mit $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) > 0$ sei bereits konstruiert.

$c_n := \frac{a_n + b_n}{2}$ (Mittelpunkt von I_n)

$$I_{n+1} \left\{ \begin{array}{ll} [a_n, c_n] & \text{falls } f(c_n) > 0 \\ [c_n, b_n] & \text{falls } f(c_n) \leq 0 \end{array} \right\} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

Dann gilt $I_{n+1} \subset I_n$, $|I_{n+1}| = \frac{1}{2} |I_n|$, $f(a_{n+1}) \leq 0$, $f(b_{n+1}) > 0$

Also $|I_n| = \frac{1}{2^n} (b_0 - a_0)$ und $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es genau ein $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$.

Noch zu zeigen: $f(x) = 0$

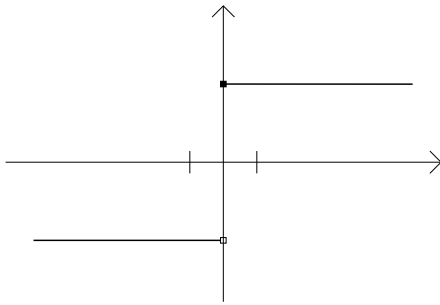
Sei $J_n := [-L(b_n - a_n), L(b_n - a_n)]$ ($n \in \mathbb{N}$). Wegen $J_{n+1} \subset J_n$ und $|J_n| = 2L \underbrace{(b_n - a_n)}_{\frac{1}{2^n} (b_0 - a_0)} =$

$\frac{L}{2^{n-1}} (a_0 - b_0)$ ist $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.

Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben, dass $f(x) \in J_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt natürlich $f(x) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Andererseits gilt $0 \in J_n$ ($n \in \mathbb{N}$), also $0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Da

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ genau ein Element enthält, folgt $f(x) = 0$.



01.12.2009

Zeige: $f(x) \in J_n := [-L(b_n - a_n), L(b_n - a_n)]$

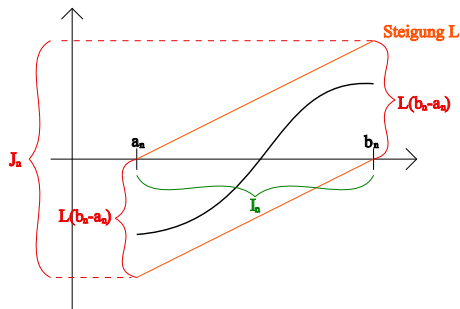


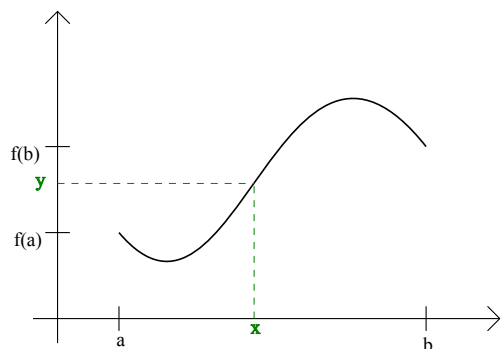
Schaubild: $f(a_n) \leq 0, f(b_n) > 0 \quad a_n \leq x \leq b_n$ wegen $x \in I_n$

$$\begin{aligned}
 & |f(x) - f(a_n)| \leq L|x - a_n| = L(x - a_n) \\
 \Rightarrow & f(x) - f(a_n) \leq L(x - a_n) \\
 & f(x) \leq \underbrace{L(x - a_n)}_{b_n - a_n} + \underbrace{f(a_n)}_{\leq 0} \leq L(b_n - a_n) \\
 & |f(b_n) - f(x)| \leq L|b_n - x| = L(b_n - x) \\
 \Rightarrow & f(b_n) - f(x) \leq L(b_n - x) \\
 \Leftrightarrow & -f(x) \leq L(b_n - x) - f(b_n) \\
 \Rightarrow & f(x) \geq -L(b_n - x) + \underbrace{f(b_n)}_{\geq 0} \geq -L(b_n - x) \\
 & \geq -L(b_n - x) \geq -L(b_n - a_n)
 \end{aligned}$$

d.h. $-L(b_n - a_n) \leq f(x) \leq L(b_n - a_n)$, also $f(x) \in J_n$.

1.23 Corollar (Vorläufige Fassung)

Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossen beschränktes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei lipschitzstetig und y eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es (mindestens) ein $x \in I$ mit $f(x) = y$.



Beweis:

1. Fall: $f(a) = f(b)$. Dann gilt $y = f(a) = f(b)$ und die Behauptung folgt mit $x = a$ oder $x = b$.
2. Fall: $f(a) \neq f(b)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (O.E.d.A.) $f(a) < f(b)$.
 Falls $y = f(a)$ bzw. $y = f(b)$ vorliegt, dann gilt die Behauptung mit $x = a$ bzw. $x = b$

Bemerkung: Wegen der Eigenschaft, dass f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ annimmt, bezeichnet man 1.22 bzw. 1.23 als Zwischenwertsatz.

1.24 (k-te Wurzel)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Dann gilt:

- (a) Die Funktion $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $x \mapsto x^k$ besitzt genau eine Umkehrfunktion.
(Bezeichnung: $x \mapsto \sqrt[k]{x}$)
- (b) $(\sqrt[k]{a})^k = a = \sqrt[k]{a^k}$ ($a \geq 0$)
 $\sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$ ($a, b \geq 0$)
- (c) $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $f : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $f(x) = x^k$ bijektiv ist.

- f injektiv:

Seien $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 \neq x_2$. Zu zeigen: $f(x_1) \neq f(x_2)$ o.E.d.A.: $0 \leq x_1 < x_2$.

Hieraus: $x_1^k < x_2^k$, d.h. insbes. $f(x_1) \neq f(x_2)$

- f ist surjektiv:

Sei $y > 0$. Zu zeigen: Es gibt $x \geq 0$ mit $f(x) = y$.

Aus $y > 0$ folgt $0 < y < (1+y) < (1+y)^k$

Mit $a := 0$ und $b := 1+y$ folgt $f|_{[a,b]}$ lipschitzstetig (nach Bsp. d zu 1.21), $f(a) = 0 < y < (1+y)^k = f(b)$

Also existiert $x \in [a, b] \subset [0, \infty[$ mit $f(x) = y$ nach 1.23.

Nach Satz 0.25a besitzt f eine Umkehrabbildung, die nach 0.24 eindeutig bestimmt ist.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^k, f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x} \quad (\text{Umkehrabbildung von } f) \\ f(f^{-1}(a)) &= a \Rightarrow (\sqrt[k]{a})^k = a \quad (a \geq 0) \\ f^{-1}(f(a)) &= a \Rightarrow \sqrt[k]{a^k} = a \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt[k]{a \cdot b}\right)^k \underbrace{=}_{\text{soeben bewiesen}} a \cdot b = (\sqrt[k]{a})^k \cdot (\sqrt[k]{b})^k \underbrace{=}_{\text{KommG, AssozG}} \left(\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}\right)^k$$

$$\text{d.h. } f\left(\sqrt[k]{a \cdot b}\right) = f\left(\sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}\right)$$

f injektiv oder Anwendung der Umkehrfunktion.

$$\Rightarrow \sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$$

(c) $0 \leq a < b$. Zeige: $\sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$.

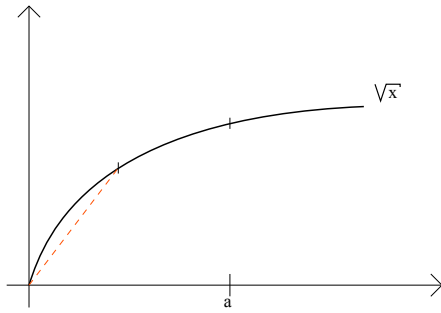
Annahme: $\sqrt[k]{a} \geq \sqrt[k]{b}$ (≥ 0)

$$\text{Dann } (\sqrt[k]{a})^k \geq (\sqrt[k]{b})^k$$

d.h. $a \geq b$. Widerspruch zu $0 \leq a < b$!

Bemerkung:

1. Für k ungerade lässt sich zeigen, dass die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$ bijektiv ist. Man kann also in diesem Fall die k -te Wurzel auf ganz $\mathbb{R}$ definieren.
2. Die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ($x \geq 0$), $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ fest, ist lipschitzstetig auf $[a, \infty[$ für jedes feste $a > 0$, aber *nicht* lipschitzstetig auf $[0, \infty[$.



Beweis: Übungen

2 Folgen und Grenzwerte

2.1 Definitionen (Grenzwert, Limes)

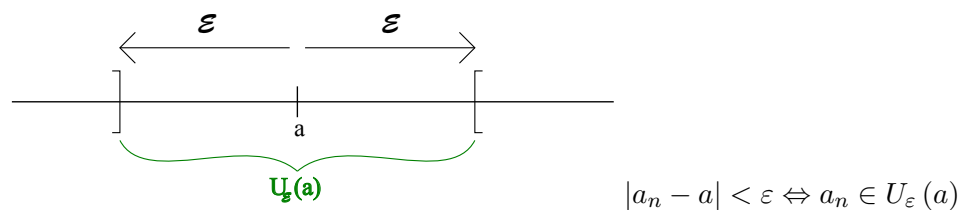
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen $a : \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

a wird als Grenzwert oder Limes der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet.

Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$

Ist $a = 0$, so heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge.

Eine Folge wird als *konvergent* bezeichnet, wenn sie gegen eine reelle Zahl konvergiert. Andernfalls heißt sie *divergent*.



Mit Hilfe der offenen ε - Umgebung von a ($\varepsilon > 0$)

$$U_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$$

lässt sich auch sagen:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \iff$

In jeder ε - Umgebung liegen fast alle Folgeglieder an.

„Fast alle“ bedeutet hier „alle mit Ausnahme höchstens endlich vieler“.

2.2 Folgerung

(a) Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt, d.h.

$$\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

(b) Falls $a_n \rightarrow a \neq 0 \ (n \rightarrow \infty)$, dann sind fast alle $a_n \neq 0$ und es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0}$ beschränkt ist, d.h. $\exists M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{1}{|a_n|} \leq M$

(c) Falls $a_n \geq 0 \ (n \in \mathbb{N})$ und $a_n \rightarrow a$, dann gilt $a \geq 0$.

Beweis:

- (a) Es gelte $a_n \rightarrow a$ ($n \rightarrow \infty$). Sei $\varepsilon = 1$. In $U_\varepsilon(a)$ liegen fast alle a_n , d.h. es existiert $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ ($n \geq n_0$)

$$\text{Also } |a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \quad (n \geq n_0)$$

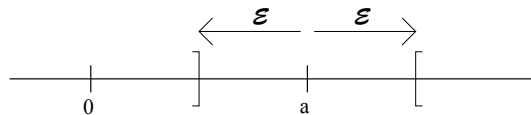
$$\text{Insgesamt } a_n \leq \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- (b) Es gelte $a_n \rightarrow a \neq 0$ ($n \rightarrow \infty$)

Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}|a| > 0$. Dann liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{2}|a|$ ($n \geq n_0$).

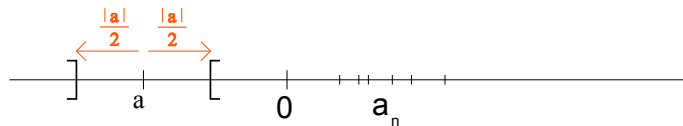
$$\text{Somit: } |a_n| \stackrel{1.12a}{\geq} |a| - |a - a_n| > |a| - \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}|a| > 0 \quad (n \geq n_0)$$

$$\text{Damit: } \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\frac{1}{2}|a|} = \underbrace{\frac{2}{|a|}}_M \quad (n \geq n_0)$$



07.12.2009

- (c) Es gelte $a_n \rightarrow a$, $a_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$). Zu zeigen: $a \geq 0$



Annahme: $a < 0$. Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}|a|$. Dann liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a)$, d.h. es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}|a| \quad (n \geq n_0)$$

Folglich:

$$a_n - a < \frac{1}{2}|a| \quad (n \geq n_0)$$

$$\text{d.h. } a_n < \underbrace{\frac{1}{2}|a|}_{= -\frac{1}{2}a \text{ (wg. } a < 0)} + a = \frac{1}{2}a < 0 \quad (n \geq n_0)$$

Widerspruch zu $a_n \geq 0$ ($k \in \mathbb{N}$).

Bemerkung: Aus $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) und $a_n \rightarrow a$ folgt im allg. *nicht* $a > 0$.

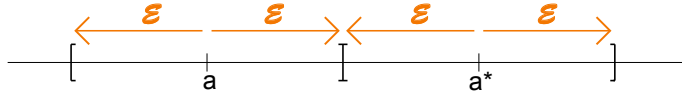
Bsp.: $a_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) (Beweis in Kürze)

2.3 Satz

Jede Folge reeller Zahlen besitzt höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Annahme: $a_n \rightarrow a \wedge a_n \rightarrow a^* \wedge a \neq a^*$.

Skizze:



Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2} |a - a^*|$. Dann $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a^*) = \emptyset$

[denn: $x \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a^*) \Rightarrow |x - a| < \varepsilon \wedge |x - a^*| < \varepsilon$

$\Rightarrow |a - a^*| \leq |x - a| + |x - a^*| < 2\varepsilon = |a - a^*|$

$\Rightarrow 0 < 0$ Widerspruch!]

Fast alle a_n liegen in $U_\varepsilon(a)$ und fast alle a_n liegen auch in $U_\varepsilon(a^*)$, also liegen fast alle a_n in $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a^*) = \emptyset$. Widerspruch!

Bemerkung: Erst dieser Satz ermöglicht, von dem Grenzwert einer Folge zu sprechen.

Beispiel:

(a) $a_n = a$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Dann: Sei $\varepsilon > 0$.

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N})$$

Somit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\exists n_0 \in \mathbb{N}}_{\text{nämlich } n_0=1} \quad \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

(b) $a_n = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem ARCHIMEDISCHEN Axiom existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Dann: $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$

Also gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

(c) $a_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$). $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist divergent.

Annahme: Es gibt $a \in \mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow a$. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ ($n \geq n_0$)

$2 = |a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < 1 + 1 = 2$ ($n \geq n_0$), also $0 < 0$ [Blitz]

2.4 Lemma

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

- (a) $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$
- (b) $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda \cdot a_n \rightarrow 0$
- (c) $a_n \rightarrow 0 \wedge b_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow 0$
- (d) $b_n \geq 0$ ($n \in \mathbb{N}$), $|a_n| \leq b_n$ ($n \in \mathbb{N}$), $b_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$

Beweis:

(a) Wegen $|a_n - 0| = |a_n| - ||a_n| - 0|$ gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : ||a_n| - 0| < \varepsilon$$

d.h. $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n| \rightarrow 0$

(b) Sei $\varepsilon > 0$. O.E.d.A.: $\lambda \neq 0$

Aus $a_n \rightarrow 0$ folgt, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - 0| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{|\lambda|}}_{>0} \quad (n \geq n_0)$$

Somit

$$\underbrace{|\lambda| |a_n - 0|}_{|\lambda \cdot a_n - 0|} < \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

Daher:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |\lambda \cdot a_n - 0| < \varepsilon$$

d.h. $\lambda \cdot a_n \rightarrow 0$.

(c) $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a_n - 0| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{>0} \quad (n \geq n_0)$$

2 Folgen und Grenzwerte

und $n_0^* \in \mathbb{N}$, so dass

$$|b_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq n_0^*)$$

Dann folgt

$$|a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $n \geq \max(n_0, n_0^*)$.

Somit $a_n + b_n \rightarrow 0$.

(d)

$$\begin{array}{lll} b_n & \geq & 0 \quad (n \in \mathbb{N}), |a_n| \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}), b_n \rightarrow 0 \\ \forall \varepsilon & > & 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |b_n| < \varepsilon \quad (\text{wg. } b_n > 0) \\ & \xRightarrow{|a_n| \leq b_n} & \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \underbrace{|a_n|}_{|a_n - 0|} < \varepsilon, \text{d.h. } a_n \rightarrow 0 \end{array}$$

2.5 Rechenregeln I

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Dann gilt:

(a) $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n - a \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0 &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| \end{aligned}$$

(b) $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + b \wedge a_n - b_n \rightarrow a - b$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \end{aligned}$$

(c) $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$ (insbesondere: $a_n \rightarrow a, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot a_n \rightarrow \lambda \cdot a$)

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right]$$

(d) $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert und ist ungleich } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \right]$$

(e) $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \wedge a_n \geq b_n \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow a \geq b$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert} \wedge a_n \geq b_n \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right]$$

2 Folgen und Grenzwerte

$$(f) \quad a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow a \wedge a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow c_n \rightarrow a$$

$$\begin{aligned} & [\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \wedge a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n] \end{aligned}$$

(Sandwich-Lemma)

Bemerkung zu (d): Da $b_n \neq 0$ nach 2.2b möglicherweise erst an $n \geq n_0$ vorliegt, müsste man eigentlich

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (n \geq n_0, n \rightarrow \infty)$$

schreiben. Die Konvergenz einer Folge hängt aber nicht von den ersten n_0 Gliedern ab (n_0 fest). Daher verwenden wir die einfache Schreibweise

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (n \rightarrow \infty)$$

Beweis:

$$(a) \quad a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Wegen $|a_n - a| = |(a_n - a) - 0| = ||a_n - a| - 0|$ folgt

$$a_n - a \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0$$

Aus $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ (wegen 1.12b) ergibt sich $a_n \rightarrow a \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$

(b) 1. Teil:

$$a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} a_n - a \rightarrow 0 \wedge b_n - b \rightarrow 0 \stackrel{2.4c}{\Rightarrow} \underbrace{a_n - a + b_n - b}_{a_n + b_n - (a+b)} \rightarrow 0 \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} a_n + b_n \rightarrow$$

$$a + b$$

$$(c) \quad a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \Rightarrow |a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq$$

$$\begin{aligned} & |a_n - a| \underbrace{|b_n|}_{\leq M \text{ (nach 2.2a)}} + |a| \cdot |b_n - b| \leq \underbrace{M \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{\rightarrow 0}}_{\rightarrow 0 \text{ nach 2.4b}} + \underbrace{|a| \cdot \underbrace{|b_n - b|}_{\rightarrow 0}}_{\rightarrow 0 \text{ nach 2.4b}} \\ & \qquad \qquad \qquad \underbrace{\qquad \qquad \qquad}_{\rightarrow 0 \text{ nach 2.4c}} \end{aligned}$$

Nach 2.4d ist $|a_n \cdot b_n - ab|$ eine Nullfolge, also nach (a)

$$a_n b_n \rightarrow a \cdot b$$

(b) 2. Teil:

$$-b_n = (-1) \cdot b_n \stackrel{(c)}{\rightarrow} (-1) \cdot b \Rightarrow a_n - b_n = a_n + (-1)b_n \stackrel{(b) \text{ 1. Teil}}{\rightarrow} a + (-1)b = a - b$$

(d) $b_n \rightarrow b \neq 0$. Dann

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b-b_n}{b_n b} \right| = \underbrace{\frac{|b_n - b|}{|b_n| \cdot |b|}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{wegen } b_n \rightarrow b}} \stackrel{2.2b}{\leq} \underbrace{\frac{M}{|b|}}_{\rightarrow 0} |b_n - b| \quad (n \geq n_0)$$

Also $\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \rightarrow 0$, d.h. $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$

$$a_n \rightarrow a, \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b} \stackrel{(c)}{\Rightarrow} \underbrace{a_n}_{\frac{a_n}{b_n}} \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\frac{1}{b}} \rightarrow a \cdot \frac{1}{b}$$

(e) $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, a_n \geq b_n \ (n \in \mathbb{N}) \stackrel{b}{\Rightarrow} \underbrace{a_n - b_n}_{\geq 0 \ (n \in \mathbb{N})} \rightarrow a - b \stackrel{2.2c}{\Rightarrow} a - b \geq 0 \Leftrightarrow a \geq b$

(f)

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow a \wedge b_n \rightarrow a \wedge a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n \in \mathbb{N}) \\ |c_n - a| &= |c_n - a_n + a_n - a| \\ &\leq \underbrace{|c_n - a_n|}_{c_n - a_n} + |a_n - a| \\ &\leq (b_n - a_n) + |a_n - a| \\ &= |b_n - a_n| + |a_n - a| \\ &= |b_n - a + a - a_n| + |a_n - a| \\ &\leq |b_n - a| + \underbrace{|a - a_n|}_{=|a_n - a|} + |a_n - a| \\ &= \underbrace{|b_n - a|}_{\rightarrow 0} + 2 \cdot \underbrace{|a_n - a|}_{\rightarrow 0} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

d.h. $c_n \rightarrow a$

2.6 Rechenregeln II (vorläufige Fassung)

(a) Sei I ein Intervall, $a \in I, a_n \in I \ (n \in \mathbb{N})$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig. Dann gilt

$$a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a)$$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \right]$$

08.12.2009

Bemerkung:

2 Folgen und Grenzwerte

1. Mit dem später zu behandelnden Begriff der Stetigkeit lässt sich (a) folgendermaßen formulieren:
Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig.
2. (b) enthält die Aussage, dass die k -te Wurzel auf $[0, \infty[$ stetig ist.
3. In (b) kann für k ungerade die Voraussetzung $a_n \geq 0$ entfallen.

Beweis:

$$(a) \quad |f(a_n) - f(a)| \leq L \underbrace{|a_n - a|}_{\substack{\rightarrow 0 \text{ wg. } a_n \rightarrow a \\ \rightarrow 0 \text{ wg. 2.4c}}} \stackrel{2.4d}{\Rightarrow} |f(a_n) - f(a)| \rightarrow 0 \stackrel{2.5a}{\Rightarrow} f(a_n) \rightarrow f(a)$$

(b)

1. Fall $a > 0$. Sei $\varepsilon := \frac{1}{2}a$. Wegen $a_n \rightarrow a$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \in U_\varepsilon(a) =]\underbrace{a - \varepsilon}_{\frac{1}{2}a}, \underbrace{a + \varepsilon}_{\frac{3}{2}a}[\subset]\frac{a}{2}, \infty[$ ($n \geq n_0$)



$x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ist lipschitzstetig auf $[\frac{a}{2}, \infty[$ nach der Bemerkung zu Satz 1.24 (ÜA), also folgt $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{a}$ nach (a).

2. Fall $a = 0$. Hier wird „Epsilontik“ benötigt. Sei $\varepsilon > 0$. Zu der reellen Zahl $\varepsilon^k > 0$ existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - 0| < \varepsilon^k$ ($n \geq n_0$)
 [wegen $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)]

Hieraus $|\sqrt[k]{a_n} - 0| < \varepsilon$ ($n \geq n_0$)

Wegen der Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ folgt $\sqrt[k]{a_n} \rightarrow 0$

2.7 Einige Grenzwerte

- (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$
- (b) Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$
- (c) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$
- (d) Es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- (e) Sei $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n = 0$.

Beweis:

$$(a) \quad 0 \leq \frac{1}{n^k} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}, \text{ also } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0 \text{ nach 2.5f.}$$

$$\text{Oder: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \underbrace{=}_{\text{mehrfache Anw. von 2.5c}} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}_{k\text{-mal}} = 0$$

$$(b) \quad \text{Wähle } a_n = \frac{1}{n} \text{ in 2.6b. Dann } a_n \rightarrow 0, \text{ also } \underbrace{\sqrt[k]{\frac{1}{n}}}_{\frac{1}{\sqrt[k]{n}}} \rightarrow \sqrt[k]{0} = 0.$$

$$(d) \quad n = \left(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\geq 1} \right)^n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n \underbrace{=}_{\text{Binom. Satz}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\underbrace{\sqrt[n]{n} - 1}_{\geq 0} \right)^k \geq \binom{n}{0} (\sqrt[n]{n} - 1)^0 + \binom{n}{2} (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \Rightarrow (\sqrt[n]{n} - 1)^2 \leq \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n} \Rightarrow |\sqrt[n]{n} - 1| \leq \frac{2}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{(b)} 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

(c)

1. Fall: $a \geq 1$

$$\text{Dann } 1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\xrightarrow{(a)} 1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq a)$$

Also nach 2.5f $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$.

2. Fall: $a > 1$

Dann $\frac{1}{a} > 1$, also nach dem 1. Fall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}_{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = 1. \text{ Also } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} \stackrel{2.5d}{=} \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}}} = \frac{1}{1} = 1$$

(e) Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $|q| < 1$.

Dann

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n^k |q|^n} &= \frac{1}{n^k} \left(\frac{1}{|q|} \right)^n \\
 &= \frac{1}{n^k} \left(1 + \underbrace{\left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)}_{\geq 0 \text{ wg. } |q| < 1} \right)^n \\
 &\stackrel{\text{Binom. Satz}}{=} \frac{1}{n^k} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)^i \\
 &\geq \frac{1}{n^k} \left(\binom{n}{k+1} \left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)^{k+1} \right) \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq k+1) \\
 &= \frac{n(n-1)\dots(n-k)}{(k+1)!} \left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)^k \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq k+1) \\
 &= n \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k}{n} \right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)^k}{(k+1)!} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq k+1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Also } n^k \cdot |q|^n \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{(k+1)!}{\left(1 - \frac{1}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k}{n} \right) \left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)^k}}_{\rightarrow \frac{(k+1)!}{\left(\frac{1}{|q|} - 1 \right)^k}} \rightarrow 0$$

Somit $|n^k q^n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), also wegen 2.4a $n^k q^n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Oft sind wie in diesem Beweis Umformungen nötig, um einen Grenzwert zu bestimmen.

Weiteres Bsp.: Existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$?

$$0 \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Somit $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$

2.8 Definition (Häufungspunkt)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. a heißt Häufungspunkt der Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Mit Hilfe der ε -Umgebung von a lässt sich äquivalent schreiben:

a Häufungspunkt in $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, genau dann, wenn in jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen unendlich viele Folgenglieder a_n .

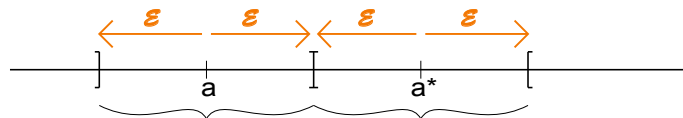
2.9 Folgerung

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge. Dann ist a der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis: a Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$ In jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen fast alle a_n
 $\Rightarrow$ In jeder ε -Umgebung liegen unendlich viele $a_n \Leftrightarrow a$. H.P. (Häufungspunkt) von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Zu zeigen: a einziger H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Annahme: a^* weiterer H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a \neq a^*$.



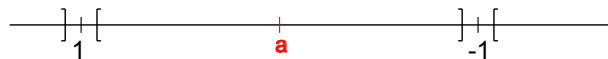
Mit $\varepsilon := \frac{1}{2} |a - a^*| > 0$ folgt $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a^*) = \emptyset$.

Da in $U_\varepsilon(a)$ alle a_n mit Ausnahme höchstens endlich vieler n liegen, kann $U_\varepsilon(a^*)$ höchstens endlich viele a_n enthalten (wegen $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a^*) \neq \emptyset$). Somit kann a^* *kein* H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein.

Widerspruch!

Beispiel:

(a) $a_n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$). $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat die H.P. 1 und -1



In $U_\varepsilon(1)$ und $U_\varepsilon(-1)$ liegen unendlich viele a_n , also sind 1 und -1 H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Weitere H.P. existieren nicht:

Wir wählen zu $a \notin \{-1, 1\}$ $\varepsilon > 0$ so klein, dass $1 \notin U_\varepsilon(a)$ und $-1 \notin U_\varepsilon(a)$. (z.B. $\varepsilon := \frac{1}{2} \min(|a - 1|, |a + 1|)$)

Da $U_\varepsilon(a)$ kein Folgenglied enthält, ist a kein H.P. von $((-1)^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

(b) $a_n = n$ ($n \in \mathbb{N}$). $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat *keinen* H.P.

[Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann existiert nach dem ARCHIMEDISCHEN Axiom $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > a + 1$. Also gilt:

$\forall n \geq n_0 : n > a + 1$, d.h.

$\forall n \geq n_0 : n \notin U_1(a)$

Somit ist a kein H.P. von $(n)_{n \in \mathbb{N}}$]

- (c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \dots\right)$ besitzt unendlich viele H.P., nämlich alle rationalen Zahlen in $[0, 1]$

(denn in der Folge kommt jede rationale Zahl zwischen 0 und 1 unendlich oft vor.)

[ohne Beweis: Auch jede reelle Zahl in $[0, 1]$ ist H.P. dieser Folge]

2.10 Lemma

Sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$, $a_n \in I_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

gilt insbesondere für $I_n = [A_n, B_n]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

Beweis: $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Intervallschachtelung, d.h. insbesondere

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}. |I_{n_0}| < \varepsilon$$

Wegen $I_{n+1} \subset I_n$ folgt $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |I_n| \leq \varepsilon$

Somit: $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$.

Wegen $a, a_n \in I_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ergibt sich

$$|a - a_n| \leq \underbrace{|I_n|}_{\rightarrow 0}$$

d.h. $a_n \rightarrow a$.

Die letzte Aussage folgt durch Wahl von $a_n = A_n$ ($n \in \mathbb{N}$) bzw. $a_n = B_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

14.12.2009

Bemerkung: Aus Lemma 2.10 folgt, dass für die B -adische Entwicklung $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$

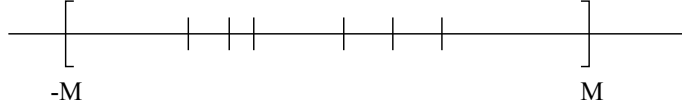
von $x \in [0, 1[$ gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k B^{-k} =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-k}$$

2.11 Satz von Bolzano-Weierstraß (1. Fassung)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine *beschränkte* Folge reeller Zahlen, d.h. $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$

Dann besitzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungspunkt.



Beweis: -M

M

[Idee: Bei jeder Zerlegung von $[-M, M]$ in endlich viele Teilintervalle gibt es mindestens eines, das unendlich viele Folgenglieder enthält.]

Sei $I_0 = [A_0, B_0] = [-M, M]$. Unendlich viele a_n , nämlich alle, liegen in I_0 .

Sei $I_k := [A_k, B_k]$ ein Intervall der Länge $\frac{B_0 - A_0}{2^k}$, in dem unendlich viele a_n liegen.

Sei $C_k := \frac{A_k + B_k}{2}$

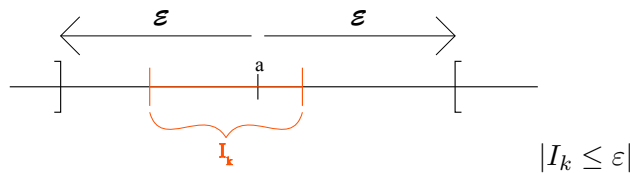
Setze $I_{k+1} := \begin{cases} [A_k, C_k], & \text{falls in } [A_k, C_k] \text{ unendlich viele } a_n \text{ liegen.} \\ [C_k, B_k], & \text{falls in } [A_k, C_k] \text{ höchstens endlich viele } a_n \text{ liegen.} \end{cases}$

Nach Konstruktion gilt $|I_{k+1}| = \frac{1}{2} |I_k| = \frac{B_0 - A_0}{2^{k+1}}$ und es liegen unendlich viele a_n in I_{k+1} .

Somit ist $(I_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Intervallschachtelung und es gibt $a \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_k = \{a\}$.

Behauptung: a ist Häufungspunkt in $(a_n)_{k \in \mathbb{N}}$.

Denn: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}$, so dass $|I_k| < \varepsilon$.



Wegen $a \in I_k$, folgt $I_k \subset U_\varepsilon(a)$

$$\left[x \in I_k \xrightarrow{a \in I_k} |x - a| \leq |I_k| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in U_\varepsilon(a) \right]$$

Nach Konstruktion liegen unendlich viele a_n in I_k , also auch in $U_\varepsilon(a)$.

2.12 Satz von Bolzano-Weierstraß (2. Fassung)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt einen kleinsten und einen größten Häufungspunkt.

(Bezeichnung: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$)
 Limes inferior Limes superior

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: Fast alle Folgenglieder liegen in $\left] \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n - \varepsilon, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \varepsilon \right[$
 [„Fast alle“: Mit Ausnahme höchstens endlich vieler]

Beweis: Wir zeigen, dass die im Beweis zu Satz 2.11 verwendete Intervallschachtelung $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $I_k = [A_k, B_k]$ den kleinsten Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liefert.

1. Diese Intervallschachtelung hat die Eigenschaft, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ immer höchstens endlich viele Folgenglieder $< A_k$ sind.

[Das liegt daran, dass überhaupt *kein* Folgenglied $< A_0$ ist und bei jeder Intervallhalbierung entweder keine neuen Folgenglieder $< A_{k+1}$ hinzukommen (Wahl des linken Teilintervalls: $A_{k+1} = A_k$) oder höchstens endlich viele hinzukommen (Wahl des rechten Teilintervalls)]

2. Für den Häufungspunkt $a \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_k$ gilt:

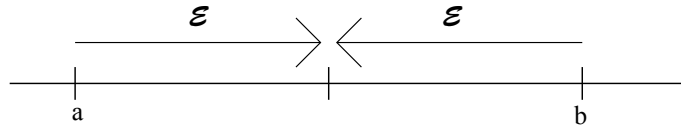
Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt für fast alle n : $a_n > a - \varepsilon$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > a - \varepsilon$

Denn: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.10 folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} A_k = a$, somit gibt es mindestens ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $A_k \in U_\varepsilon(a)$, also insbesondere $a - \varepsilon < A_k \leq a + \varepsilon$

Da für höchstens endlich viele n $a_n < A_k$ vorliegt, gibt es höchstens endlich viele n mit $a_n \leq a - \varepsilon$.

Somit für fast alle n : $a_n > a - \varepsilon$

3. Es gibt keinen Häufungspunkt $b < a$



Denn: Für $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$ gibt es nach 2. höchstens endlich viele n mit $a_n < a - \varepsilon = b + \varepsilon$. Daher enthält $U_\varepsilon(b)$ höchstens endlich viele a_n . Somit ist b kein H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4. a ist daher der kleinste H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Bez. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$) und für $\varepsilon > 0$ und fast alle n gilt: $a_n > \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n - \varepsilon$.

Entsprechend zeigt man $a_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \varepsilon$ für fast alle n

2.13 Folgerung

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit einem einzigen Häufungspunkt a . Dann konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Beweis: Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur einen H.P. a besitzt, gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Nach Satz 2.12 liegen für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle Folgenglieder in $\underbrace{]a - \varepsilon, a + \varepsilon[}_{U_\varepsilon(a)}$.

Somit $a_n \varepsilon a$ ($n \rightarrow \infty$)

Bemerkung: Ohne die Voraussetzung „beschränkt“ ist die Aussage im allg. nicht richtig.

$$\text{z.B. } a_n = \begin{cases} n & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt nur den H.P. 0, konvergiert aber nicht.

2.14 Definition (monotone Folgen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Sie heißt

- (a) (streng) monoton wachsend $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \stackrel{(>)}{\geq} a_n$
- (b) (streng) monoton fallend $:\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \stackrel{(<)}{\leq} a_n$
- (c) (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

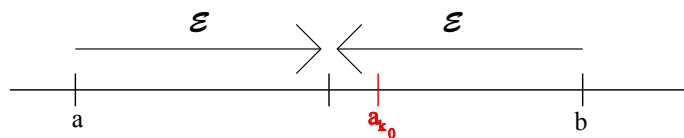
2.15 Satz (Konvergenz beschränkter monotoner Folgen)

Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Beweis: O.E.d.A. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und beschränkt.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt nach Satz 2.11 mindestens einen H.P.

Annahme: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitze zwei H.P. $a < b$



Setze $\varepsilon := \frac{1}{2}(b - a)$

Da in $U_\varepsilon(b)$ wg. b H.P. unendlich viele a_n liegen, gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_{n_0} \in U_\varepsilon(b)$, also insb. $a_{n_0} > b - \varepsilon$.

Wegen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend folgt

$$a_n \geq a_{n_0} > b - \varepsilon \quad (n \geq n_0)$$

Wegen $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$ gibt es daher höchstens endlich viele $a_n \in U_\varepsilon(a)$. Somit ist a kein H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Behauptung folgt dann aus Folgerung 2.13.

Bemerkung:

- (a) Da eine monoton wachsende Folge automatisch nach *unten* beschränkt ist, d.h. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq M$, kann auch folgendermaßen formuliert werden:

Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge konvergiert

Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge konvergiert

- (b) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow a_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \quad (n \in \mathbb{N})$

[Beweis: $a_n \leq a_k \quad (k \geq n)$

$$\underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} a_n}_{a_n} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k]$$

Analog für monoton fallende nach unten beschränkte Folgen.

2.16 Definition (Teilfolge)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen (d.h. $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$)

Dann heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiel:

- (a) $\left(\frac{1}{2k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ und $\left(\frac{1}{2^k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sind Teilfolgen in $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$
 $\quad \quad \quad [n_k=2k] \quad \quad \quad [n_k=2^k]$

- (b) $(a_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 $\quad \quad \quad [n_k=k+1]$

(Natürlich: $(a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ Teilfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$)

15.12.2009

2.17 Folgerung

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt:

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow$ Jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a
- (b) a ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$ Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

Beweis:

- (a) „ $\Rightarrow$ “: Sei $a_n \rightarrow a$, $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von a .

Dann liegen in jeder ε -Umgebung von a fast alle a_n , also auch fast alle a_{n_k} .

Somit $a_{n_k} \rightarrow a$

„ $\Leftarrow$ “ Jede Folge ist Teilfolge von sich selbst [nämlich mit $n_k = k$]

- (b) „ $\Rightarrow$ “ Sei a H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Setze für $k \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$.

In $U_{\varepsilon_1}(a)$ liegen unendlich viele a_n , also gibt es insbesondere $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}(a)$. In $U_{\varepsilon_2}(a)$ liegen ebenfalls unendlich viele a_n , also gibt es $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ mit $a_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}(a)$ usw.

Man erhält so $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ mit $a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a)$

Zeige: $a_{n_k} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$)

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$.

Für $k \geq k_0$ folgt: $|a_{n_k} - a| < \varepsilon_k = \frac{1}{k} \stackrel{k \geq k_0}{\leq} \frac{1}{k_0} < \varepsilon$

„ $\Leftarrow$ “ Sei $a_{n_k} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$)

Da a Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, ist a auch Häufungspunkt von $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Dafür liegen in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Glieder der Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, also auch unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Damit ist a H.P. von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.18 Satz von Bolzano-Weierstraß (3. Fassung)

Jede beschränkte Folge enthält (mindestens) eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Folgt sofort aus Satz 2.11 und Folgerung 2.17b.

2.19 Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ($n \geq 2$ fest). Dann gilt $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Beweis: ÜA 32

2.20 Folgerung

Ein Produkt aus n positiven reellen Zahlen mit konstanter Summe ist am größten, wenn alle Faktoren gleich sind.

Beweis: Seien $a_1, \dots, a_n > 0$ und $a_1 + \dots + a_n = s$. Dann $a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq \left(\frac{s}{n}\right)^n$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $a_1 = \dots = a_n$.

Motivation der Exponentialfunktion:

Kapitalverzinsung 1 Jahr, Zinssatz x (z.B. $x = 0.03$, 3%)

$$K_0(1+x)$$

Zweimalige Verzinsung mit halbem Zinssatz $\frac{x}{2}$.

$$\text{Nach } \frac{1}{2} \text{ Jahr: } K_0\left(1 + \frac{x}{2}\right)$$

$$\text{Nach 1 Jahr: } K_0\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) = K_0\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2$$

$$n\text{-malige Verzinsung mit Zinssatz } \frac{x}{n}: K_0\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

2.21 Definition und Satz

(a) Es gilt

$$\underbrace{e}_{\text{Eulersche Zahl}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad [0! = 1]$$

(b) Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ist wohldefiniert und wird als Exponentialfunktion bezeichnet.

(c) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: \exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$

Bemerkung: $e = 2.71828\dots$

Beweis:

(a) Zeige $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend, weil

$$\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}_{n+1 \text{ Faktoren mit Summe } \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot n+1=n+2} \stackrel{2.20}{\leq} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{n+1 \text{ Faktoren mit Summe } \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \cdot (n+1)=n+2}$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\stackrel{\text{Binom. Satz}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k \cdot k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1 \cdot \left(n - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} \quad (*) \\ &\leq \underbrace{1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}}_{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}} \quad (**) \end{aligned}$$

Wegen $k! \geq 2^{k-1}$ ($k \in \mathbb{N}$) [ÜA 21a] folgt

$$\begin{aligned} &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \\ &= 1 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\ &\stackrel{\text{gem. Summenformel}}{=} 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3 \quad (***) \end{aligned}$$

Also sind sowohl $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n_{n \in \mathbb{N}}$ als auch $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsende, durch 3 nach oben beschränkte Folgen. Somit existieren $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq 3$

Zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

$$\begin{aligned}
 0 < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \left(1 + \sum_{k=0}^n \frac{(1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!}\right) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \left(1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{(1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!}\right) \\
 &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{(1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!}\right) \\
 &= \sum_{k=2}^n \left(\frac{1 - (1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!}\right)
 \end{aligned}$$

Wir benutzen jetzt die verallgemeinerte BERNOULLI-Ungleichung aus ÜA 19a:

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) &\geq 1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} \dots + \frac{k-1}{n}\right) \quad (k \leq n) \\
 &= 1 - \frac{k(k-1)}{2n} \\
 \Rightarrow 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) &\leq \frac{k(k-1)}{2n}
 \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \frac{1 - (1 - \frac{1}{n}) \dots (1 - \frac{k-1}{n})}{k!} &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{2n} \cdot \frac{k(k-1)}{k!} \\
 &= \frac{1}{2n} \cdot \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} \\
 &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \\
 &\stackrel{(***)}{\leq} \frac{1}{2n} \cdot 3 \rightarrow (n \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

Also $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = 0$, woraus (a) folgt.

(b) Für $n > |x|$, d.h. $\frac{|x|}{n} < 1$, gilt $1 + \frac{x}{n} > 0$, also

$$\underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot 1}_{\text{Summe der Faktoren } (1 + \frac{x}{n}) \cdot n + 1 = n + x + 1} \leq \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}_{\text{Summe der Faktoren } (1 + \frac{x}{n+1}) \cdot (n+1) = n + 1 + x} \quad (n > |x|)$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > |x|$ fest.

2 Folgen und Grenzwerte

$$(1 + \frac{x}{n})^n \leq (|1 + \frac{x}{n}|)^n \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{N}{n}\right)^n \stackrel{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\leq} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N = \left(1 + \frac{N}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^N\right)$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^N \leq e^N$$

Also ist $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n_{n \geq |x|}$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge und damit existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n := \exp(x)$

(c) Wir verwenden $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n (x, y \in \mathbb{R}) (\#)$

das wir nachher beweisen.

$$\begin{aligned} \exp(x_1) \cdot \exp(x_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{x_2}{n}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{x_1}{n}\right) \left(1 + \frac{x_2}{n}\right)\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \frac{x_1}{n} \cdot \frac{x_2}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_1+x_2}{n} + \frac{x_1 \cdot x_2}{n^2}\right)^n \stackrel{(\#)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_1+x_2}{n}\right)^n = \exp(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Beweis von $(\#)$:

$$\begin{aligned} \left|\left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{y}{n^2}\right)^k - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{y}{n^2}\right)^k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^{n-k}}_{\leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \leq \exp(|x|) \ (n > |x|)} \cdot \left(\frac{y}{n^2}\right)^k\right| \\ &\leq \exp(|x|) \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{|y|^k}{n^{2k}} \stackrel{2k \geq k+1 \ (k \geq 1)}{=} \exp(|x|) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} |y|^k \\ &\leq \frac{1}{n} \exp(x) \cdot \left(1 + \frac{|y|}{n}\right)^n \leq \frac{1}{n} \exp(|x|) \cdot \exp(|y|) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

21.12.2009

Bemerkung: Analog zur Abschätzung (****)

$$0 \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\leq \frac{3}{n}\right)$$

kann man beweisen (evtl. ÜA), dass

$$\left|\sum_{k=0}^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^n}{2n} \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R}, n > |x|)$$

Wir zeigen im nächsten Abschnitt, dass die Folge $\left(\sum_{k=0}^n \frac{|x|^k}{k!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist und erhalten somit als Verallgemeinerung von (a)

$$\underbrace{\exp(x)}_{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ (Exponentialreihe)}$$

2.22 Folgerung

Es gilt:

$$(a) \exp(0) = 1, \exp(1) = e, \exp(-e) = \frac{1}{\exp(e)} \quad (x \in \mathbb{R}), \exp(x) > 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

(b)

$$\begin{aligned} \exp(m) &= e^m \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ \exp\left(\frac{1}{n}\right) &= \sqrt[n]{e} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \\ \exp(m \cdot x) &= (\exp(x))^m \quad (m \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}) \\ \exp\left(\frac{x}{n}\right) &= \sqrt[n]{\exp(x)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$(c) x_1 > x_2 \Rightarrow \exp(x_1) > \exp(x_2) \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

$$(d) \exp(x) \text{ ist lipschitzstetig auf }]-\infty, a] \quad (a \in \mathbb{R} \text{ fest})$$

$$(e) x_n \rightarrow x \Rightarrow \exp(x_n) \rightarrow \exp(x)$$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ exist.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right]$$

$$(f) \exp(\mathbb{R}) = \underbrace{]0, \infty[}_{\mathbb{R}_+}$$

Beweis:

(a)

$$\begin{aligned} \exp(0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \\ \exp(1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{2.21a}{=} e \\ 1 = \exp(0) &= \exp(x + (-x)) \stackrel{2.21c}{=} \exp(x) \cdot \exp(-x) \\ \text{Also } \exp(x) &\neq 0, \exp(-x) \neq 0 \text{ und } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \\ \exp(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{\geq 1 \ (x \geq 0)} \geq 1 \quad (x \geq 0), \text{ d.h. insbesondere} \\ \exp(x) &> 0 \ (x \geq 0) \text{ und daher } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0 \ (x \geq 0) \\ \text{Also } \exp(x) &> 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\exp(n \cdot x) &= \exp(\underbrace{x + \dots + x}_{n\text{-mal}}) \stackrel{2.21c}{=} \underbrace{\exp(x) \cdot \dots \cdot \exp(x)}_{n\text{-mal}} = (\exp(x))^n \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}) \\ \exp((-n) \cdot x) &= \frac{1}{\exp(n \cdot x)} = \frac{1}{(\exp(x))^n} = (\exp(x))^{-n} \\ \exp(-n \cdot x) &= \frac{1}{\exp(n \cdot x)} = \frac{1}{(\exp(x))^n} = (\exp(x))^{-n}\end{aligned}$$

Insgesamt (unter Verwendung von (a)):

$$\exp(m \cdot x) = (\exp(x))^m \quad (m \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R})$$

Spezialisiere

$$\begin{aligned}x = 1 & : \exp(m) = (\exp(1))^m \stackrel{a}{=} e^m \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{1}{n} & : \exp(\underbrace{n \cdot \frac{1}{n}}_{\substack{x \\ > 0}}) = \underbrace{\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n}_{\substack{x \\ > 0}} \Rightarrow \exp\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{\exp(1)} = \sqrt[n]{e} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\end{aligned}$$

(c) Sei $x > 0$. Zeige zunächst $\exp(x) > 1$.

$$\begin{aligned}x > 0 & \Rightarrow \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\geq} 1 + n \left(\frac{x}{n}\right) = 1 + x > 1 \\ x_1 > x_2 & \Rightarrow x_1 - x_2 > 0 \underset{\text{soeben bew.}}{\Rightarrow} \exp(x_1 - x_2) > 1 \\ & \Leftrightarrow \exp(x_1) \cdot \underbrace{\exp(-x_2)}_{\frac{1}{\exp(x_2)}} > 1 \Rightarrow \exp(x_1) > \exp(x_2)\end{aligned}$$

(d) Zeige zunächst: $\left|\frac{1-\exp(x)}{x}\right| \leq 1 \quad (x < 0) \quad (*)$

grafiken/06_21.12.09/Grafik 01.pdf

2 Folgen und Grenzwerte

$$\frac{1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{|x|} \underbrace{\leq}_{n \geq |x| \Rightarrow \left|\frac{x}{n}\right| \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{n} \geq -1} \frac{1 - \left(1 + n \cdot \frac{x}{n}\right)}{|x|} = \frac{-x}{|x|} \stackrel{x \leq 0}{=} \frac{|x|}{|x|} = 1$$

Bernoulli-Ungleichung anwendbar

$$\text{Also } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{|x|} \leq 1 \text{ d.h. } \frac{1 - \exp(x)}{|x|} \leq 1$$

Wegen $x \leq 0$ folgt $\exp(x) \leq \exp(0) = 1$, sonst

$$0 \leq \frac{1 - \exp(x)}{|x|} \leq 1, \text{ woraus } \left| \frac{1 - \exp(x)}{x} \right| \leq 1 \quad (x < 0) \text{ folgt.}$$

O.E.d.A.: $x_1 < x_2 \leq a$

$$\begin{aligned} & |\exp(x_1) - \exp(x_2)| \\ &= |\exp(x_2) - \exp(x_1)| \\ &\stackrel{2.21c}{=} |\exp(x_2)(1 - \exp(x_1 - x_2))| \\ &= \underbrace{|\exp(x_2)|}_{\exp(x_2)} \cdot \left| 1 - \underbrace{\exp(x_1 - x_2)}_{< 0} \right| \\ &\leq \exp(x_2) \cdot |x_1 - x_2| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \exp(a) \cdot |x_1 - x_2| \\ &\stackrel{(c)}{\leq} \end{aligned}$$

- (e) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow x$. Die Folge ist somit beschränkt, d.h. insbesondere es gibt $a \in \mathbb{R}$ mit $x_n \leq a \quad (n \in \mathbb{N})$.

Hieraus $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a$.

Da $\exp$ auf $] - \infty, a]$ lipschitzstetig ist (siehe (d)), folgt aus Satz 2.6.a

$$\exp(x_n) \rightarrow \exp(x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

- (f) Wegen $\exp(x) > 0$, gilt $\exp(\mathbb{R}) \subset]0, \infty[$.

Noch zu zeigen: Für $y > 0$ exist. $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = y$.

Sei $y > 0$. Dann exist. $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} \leq y \leq m$.

Wegen $m \leq e^m \leq y \leq e$ bzw. $\exp(-m) \leq y \leq \exp(m)$

$[m \leq e^m$ leicht z.B. durch vollständige Induktion zu beweisen]

folgt $\frac{1}{e^m} \leq y \leq e^m$ bzw. $\exp(-m) \leq y \leq \exp(m)$

Nach Folgerung 1.23 nimmt $\exp$ jeden Wert zwischen $\exp(-m)$ und $\exp(m)$ an, d.h. es gibt $x \in [-m, m]$, so dass $\exp(x) = y$

Bemerkung: Wegen 2.22b und 2.21c schreiben wir $\exp(x) = e^x$, insbesondere $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ und $e^{m \cdot x} = (e^x)^m$ ($m \in \mathbb{Z}$)

[grafiken/06-21-12-09/Danger.pdf]

2.23 Satz und Definition

Es gilt:

- (a) Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \exp(x)$ besitzt genau eine Umkehrfunktion
(Bezeichnung: $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, natürlicher Logarithmus)
- (b) $e^{\ln x} = x \quad (x > 0)$, $\ln e^x = x \quad (x \in \mathbb{R})$
 $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$
 $\ln x^m = m \cdot \ln x \quad (m \in \mathbb{Z}, x > 0)$
- (c) $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$
- (d) $\ln$ ist lipschitzstetig auf $[a, \infty[$ ($a > 0$ fest).
- (e) $x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, $x > 0$, $x_n \rightarrow x \Rightarrow \ln x_n \rightarrow \ln x$

Beweis:

- (a) Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ ist injektiv nach 2.22d.
 [Denn: Sei $x_1 \neq x_2$. O.E.d.A. $x_1 < x_2$. Also nach (d) $\exp(x_1) < \exp(x_2)$, somit $\exp(x_1) \neq \exp(x_2)$]
 Sie ist surjektiv nach 2.22f. Also gibt es nach Satz 0.25 und Satz und Definition 0.24 genau eine Umkehrfunktion.

- (b) Die ersten beiden Gleichungen folgen aus

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad (y > 0), \quad f f^{-1}(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$e^{\ln(x_1 \cdot x_2)} = x_1 \cdot x_2 \stackrel{2.21c}{=} e^{\ln x_1} \cdot e^{\ln x_2}$$

Wegen der Injektivität vom $x \mapsto e^x$ folgt $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$

$$e^{\ln \frac{x_1}{x_2}} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{\ln x_1}}{e^{\ln x_2}} = e^{\ln x_1 - \ln x_2}, \text{ also } \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$$

$$\ln(x^n) = \ln(\underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-mal}}) = \underbrace{\ln x + \dots + \ln x}_{n\text{-mal}} = n \cdot \ln x \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\ln(x^{-n}) = \ln \frac{1}{x^n} = \underbrace{\ln 1}_{0 \text{ wegen } \exp(0)=1} - \ln x^n = -n \cdot \ln x$$

$$\ln x^0 = \ln 1 = 0$$

Somit $\ln x^m = m \cdot \ln x \quad (m \in \mathbb{Z})$

(c) $0 < x < x_2$.

Behauptung: $\ln x_1 < \ln x_2$

Annahme: $\ln x_1 \geq \ln x_2 \xrightarrow{2.22c} \underbrace{e^{\ln x_1}}_{x_1} \geq \underbrace{e^{\ln x_2}}_{x_2} \Rightarrow x_1 \geq x_2$ grafiken/06_21.12.09/LightningBolt.pdf

(d) Zeige zunächst: $\left| \frac{\ln y}{y-1} \right| \leq 1 \quad (y > 1) \quad (*)$

Beweis: $\frac{(1+\frac{x}{n})^n - 1}{x} \geq \frac{(1+n \cdot \frac{x}{n}) - 1}{x} = 1 \quad (x > 0, n \in \mathbb{N})$

Somit $\frac{e^x - 1}{x} \geq 1 \quad (x > 0)$ und wegen $e^x > e^0 \quad (x > 0)$ folgt

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} \right| \geq 1 \quad (x > 0).$$

Für $y > 1$ gilt $\ln y > \underbrace{\ln 1}_0$. Setze $x := \ln y$ in die vorige Ungleichung ein.

$$\left| \frac{e^{\ln y} - 1}{\ln y} \right| \geq 1 \quad (y > 1)$$

Das ist äquivalent zu:

$$\left| \frac{\ln y}{y-1} \right| \leq 1 \quad (y > 1)$$

Sei $x_1 \geq x_2 \geq a > 0$

$$|\ln x_1 - \ln x_2| = \underbrace{\left| \ln \frac{x_1}{x_2} \right|}_{>1} \stackrel{(*)}{\leq} \left| \frac{x_1}{x_2} - 1 \right| = \frac{1}{|x_2|} |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{a} |x_1 - x_2|$$

(e) Analog zum Beweis von 2.22e

22.12.2009

Vorbemerkung: Es gilt für $a > 0$

$$\begin{aligned} a^m &= (e^{\ln a})^m = e^{m \ln a} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ \sqrt[n]{a} &= \underbrace{\sqrt[n]{e^{\ln a}}}_{= e^{\frac{1}{n} \ln a}} \\ \underbrace{\sqrt[n]{a^m}}_{a^{\frac{m}{n}} :=} &= e^{\frac{1}{n} \ln a^m} = e^{\frac{m}{n} \ln a} \end{aligned}$$

Wir definieren deshalb für $a > 0$

$$a^x := e^{x \ln a} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(Exponentialfunktion zur Basis a)

2.24 Satz

Sei $a > 0, b > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a^{x_1+x_2} &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \\ \text{(a)} \quad (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (x \in \mathbb{R}) \\ (a^{x_1})^{x_2} &= a^{x_1 \cdot x_2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \text{Sei } a > 1. \text{ Dann } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

$$\text{Sei } 0 < a < 1. \text{ Dann } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$$

$$\text{(c)} \quad x_1 \rightarrow x \Rightarrow a^{x_n} \rightarrow a^x$$

Sei ab jetzt $a > 0$ und $a \neq 1$. Dann gilt

$$\text{(d)} \quad \text{Die Funktion } \mathbb{R}_+, x \rightarrow a^x \text{ besitzt genau eine Umkehrfunktion (Bez. } \log_a x \text{ Logarithmus zur Basis } a).$$

$$\text{Es gilt } \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(e)

$$\begin{aligned} \log_a a^x &= x \quad (x \in \mathbb{R}), a^{\log_a x} = x \quad (x > 0) \\ \log(x_1 \cdot x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad (x_1, x_2 > 0) \\ \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad (x_1, x_2 > 0) \\ \log_a(x_1^{x_2}) &= x_2 \log_a x_1 \quad (x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\text{(f)} \quad x_1 > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), x > 0, x_n \rightarrow x \Rightarrow \log_a x_n \rightarrow \log_a x$$

$$\text{(g)} \quad \text{Sei jetzt } a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

$$a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n^{b_n} \rightarrow a^b$$

$$\left[a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ exist.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \right]$$

Beweis:

$$\begin{aligned} &a^{x_1+x_2} \\ &= e^{(x_1+x_2) \cdot \ln a} \\ \text{(a)} \quad &= e^{x_1 \ln a + x_2 \ln a} \\ &= e^{x_1 \ln a} \cdot e^{x_2 \ln a} \\ &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad (a > 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Restliche Aussagen: ÜA, Tut.

(b)

2 Folgen und Grenzwerte

1. Fall: $a > 1$. Dann $\ln a > \ln 1 = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \\ \Rightarrow \ln a \cdot x_1 &< \ln a \cdot x_2 \\ \stackrel{2.22c}{\Rightarrow} e^{x_1 \ln a} &< e^{x_2 \ln a} \\ \Leftrightarrow a^{x_1} &< a^{x_2} \end{aligned}$$

2. Fall: $0 < a < 1$: Dann $\frac{1}{a} > 1$, also

$$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \\ \stackrel{1. \text{ Fall}}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} &< \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2} \\ \stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{a^{x_1}} &< \frac{1}{a^{x_2}} \\ \Leftrightarrow a^{x_2} &< a^{x_1} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x_n &\rightarrow x \\ \Rightarrow x_n \cdot \ln a &\rightarrow x \cdot \ln a \\ \stackrel{2.22e}{\Rightarrow} e^{x_n \ln a} &\rightarrow e^{x \ln a} \\ \Leftrightarrow a^{x_n} &\rightarrow a^x \end{aligned}$$

(d) Setze

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = x \cdot \ln a$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, f_2(x) = e^x$$

$$\text{Dann } a^x = e^{x \cdot \ln a} = f_2(f_1(x)) = (f_2 \circ f_1)(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Für $a > 0$ und $a \neq 1$ ist f_1 bijektiv, ebenso f_2 . Also ist nach 0.25d $f_2 \circ f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ bijektiv und es gilt:

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)^{-1} &= f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \\ f_2^{-1}(x) &= \ln x \quad (x > 0) \\ f_1^{-1}(x) &= \frac{x}{\ln a} \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{lcl} f_1(f_1^{-1}(x)) & = & f_1\left(\frac{x}{\ln a}\right) = \ln a \cdot \frac{x}{\ln a} = x \quad (x \in \mathbb{R}) \\ f_1^{-1}(f_1(x)) & = & f_1^{-1}(x \ln a) = \frac{1}{\ln a} x \ln a = x \quad (x \in \mathbb{R}) \end{array} \right]$$

$$\text{Also } \log_a(x) := (f_2 \circ f_1)^{-1}(x) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(x)) = f_1^{-1}(\ln x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x > 0)$$

$$(e) \log_a a^x = x \quad (x \in \mathbb{R}), a^{\log_a x} = x \quad (x > 0)$$

klar nach den Eigenschaften von Umkehrfunktionen

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) \stackrel{(d)}{=} \frac{\ln(x_1 \cdot x_2)}{\ln a} = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{\ln a} = \frac{\ln x_1}{\ln a} + \frac{\ln x_2}{\ln a} = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \quad (a > 0, a \neq 1, x_1, x_2 > 0)$$

Restliche Aussagen analog (Übungen, Tutorien)

(f) $x_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), $x > 0$, $x_n \rightarrow x$

$$\begin{array}{lll} \stackrel{2.23e}{\Rightarrow} & \ln x_n & \rightarrow \ln x \\ \stackrel{a>0, a \neq 1}{\Rightarrow} & \frac{\ln x_n}{\ln a} & \rightarrow \frac{\ln x}{\ln a} \\ \Leftrightarrow & \log_a x_n & \rightarrow \log_a x \end{array}$$

(g) ÜA

Bemerkung:

1. Neben $\log_e = \ln$ werden häufig noch

$\log_2 =: \text{ld}$ (Logarithmus dualis)

$\log_{10} =: \text{lg}$ (Zehnerlogarithmus)

verwendet. Sie sind nach (d) jeweils konstante Vielfache von $\ln$.

2. Ohne die Voraussetzung $a > 0$ kann (g) falsch sein. (ÜA)

2.25 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ bzw. $(-\infty)$, wenn

$$\forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \begin{array}{l} a_n \geq M \\ \text{bzw. } (a_n \leq -M) \end{array}$$

Schreibweise:

$$\begin{array}{ll} a_n \rightarrow \infty & (\text{bzw. } a_n \rightarrow -\infty) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty & (\text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty) \end{array}$$

Bemerkung: Statt „bestimmt divergent gegen $\pm\infty$ “ wird oft auch die Sprechweise „(un-)eigentlich) konvergent gegen $\pm\infty$ “ benutzt.

Beispiel: $k \in \mathbb{N}$.

$$a_n = n^k \rightarrow \infty, a_n = -n^k \rightarrow -\infty$$

$$a_n = (-1)^n \cdot n \text{ divergent, aber nicht bestimmt}$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), a_n \rightarrow 0 &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty \\ a_n < 0 \quad (n \in \mathbb{N}), a_n \rightarrow 0 &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty \\ a_n \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \\ a_n \rightarrow -\infty &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

[Zur 1. Aussage: $a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), a_n \rightarrow 0$. Sei $M > 0$.

Zu $\epsilon := \frac{1}{M}$ exist. n_0 , so dass $\underbrace{|a_n|}_{=a_n \text{ (wg. } a_n > 0)}} < \frac{1}{M} \quad (n \geq n_0)$

Daher: $\frac{1}{a_n} > M \quad (n \geq n_0).$

2.26 Satz (Wachstumsverhalten der Exponentialfunktion und des Logarithmus)

(a) Sei $a > 1, \beta \geq 0$. Dann gilt:

$$x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{a^{x_n}}{x_n^\beta} \rightarrow \infty \text{ (bzw. } \frac{x_n^\beta}{a^{x_n}} \rightarrow 0)$$

[Später schreiben wir hierfür: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\beta} = \infty$]

„ a^x wächst für $x \rightarrow \infty$ schneller als jede Potenz“

(b) Sei $a > 1, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n^k \cdot a^{x_n} \rightarrow 0$$

[später ...]

(c) Sei $a > 1$. Dann gilt:

$$x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \log_a x \rightarrow \infty$$

[Später: $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$]

(d) Sei $a > 1$. Dann gilt:

$$x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \log_a(x_n) \rightarrow -\infty$$

[Später: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty$]

(e) Sei $a > 1, \beta > 0$. Dann gilt

$$x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\log_a(x_n)}{x_n^\beta} \rightarrow 0$$

$$[\text{Später: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(x)}{x^\beta} = 0]$$

„ $\log_a(x)$ wächst für $x \rightarrow \infty$ langsamer als jede Potenz“

(f) Sei $a > 1$, $\beta > 0$. Dann gilt

$$x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), x_n \rightarrow 0 \Rightarrow x_n^\beta \log_a(x_n) = 0$$

$$[\text{später: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta \log_a(x) = 0]$$

Bemerkung: Auf die Formulierung entsprechender Aussagen für $0 < a < 1$ wird verzichtet, weil sie sich leicht über die Beziehungen $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ und $\log_a(x) = -\log_{\frac{1}{a}}(x)$ gewinnen lassen.

Beweis: Wegen $a^x = e^{x \ln a}$ und $\ln a > 0$ (weil $a > 1$) reicht es alle Aussagen für $a = e$ zu beweisen.

(a) Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \beta$. Dann folgt für $x \geq 1$

$$\frac{e^x}{x^\beta} \geq \frac{e^x}{x^k} \geq \frac{\left(1 + \frac{x}{k+1}\right)^{k+1}}{x^k} \geq \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)^{k+1}}}{x^k} = \frac{x}{(k+1)^{k+1}}$$

Beweis zu 2.21b

$$\text{Also } x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{e^{x_n}}{x_n^\beta} \rightarrow \infty.$$

(b) Aus (a) folgt: $\frac{e^x}{x^k} \geq \frac{x}{(k+1)^{k+1}}$ ($x \geq 1$)

$$\text{also } x^k \cdot e^{-x} \leq \frac{(k+1)^{k+1}}{x} \quad (x \geq 1)$$

somit durch Ersetzen von $x \rightarrow -x$.

$$\begin{aligned} (-x)^k \cdot e^x &\leq \frac{(k+1)^{k+1}}{-x} \quad (x \leq -1) \\ \stackrel{-x=|x|}{\Rightarrow} |x|^k \cdot e^x &\leq \frac{(k+1)^{k+1}}{|x|} \quad (x \leq -1) \end{aligned}$$

$$\text{Also } x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow |x_n|^k e^{x_n} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |x_n^k e^{x_n}| &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow x_n^k e^{x_n} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

(c) $x_n \rightarrow \infty$. Sei $M > 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} x_n &\geq e^M \quad (n \geq n_0), \\ \text{also } \ln x_n &\geq \ln(e^M) = M \quad (n \geq n_0). \end{aligned}$$

Somit $x_n \rightarrow \infty$.

(d) $x_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$), $x_n \rightarrow 0$. Dann (s.o.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_n} &\rightarrow \infty \\ \stackrel{(c)}{\Rightarrow} \ln \frac{1}{x_n} &\rightarrow \infty \\ \Leftrightarrow -\ln x_n &\rightarrow \infty \\ \Leftrightarrow \ln x_n &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad & x_n \rightarrow \infty \\
 & \stackrel{\beta > 0}{\Rightarrow} \beta \cdot \ln x_n \stackrel{\text{(c)}}{\rightarrow} \infty \\
 & \stackrel{\text{(a)}}{\Rightarrow} \frac{\beta \cdot \ln x_n}{e^{\ln x_n}} \rightarrow 0 \\
 & \Rightarrow \frac{\ln x_n}{x_n^\beta} \rightarrow 0 \\
 \text{(f)} \quad & x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \\
 & x_n \rightarrow 0 \\
 & \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \infty \\
 & \stackrel{\text{(e)}}{\Rightarrow} \frac{\ln \frac{1}{x_n}}{\left(\frac{1}{x_n}\right)^\beta} \rightarrow 0 \\
 & \Leftrightarrow x_n^\beta \ln x_n \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

11.01.2010

2.27 Definition (Cauchyfolge)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cauchyfolge*, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$$

2.28 Satz (Cauchy Kriterium für Folgen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}$$

Beweis

“ $\Rightarrow$ ”: Es gelte $a_n \rightarrow a$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad (n \geq n_0)$$

Also gilt auch

$$|a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad (m \geq n_0)$$

Insgesamt:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + \underbrace{|a - a_m|}_{=|a_m - a|} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad (n, m \geq n_0 := N)$$

2 Folgen und Grenzwerte

„ $\Leftarrow$ “ Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n, m \geq N) \quad (*)$$

Insbesondere folgt

$$|a_n - a_N| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (n \geq N),$$

woraus sich $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ergibt. Somit gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$a_{n_k} \rightarrow a \quad (k \rightarrow \infty)$$

(Satz 2.18 - Bolzano-Weierstraß 3. Fassung)

Also existiert $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k \geq k_0) \quad (**)$$

Wähle ein $k \geq k_0$ mit $n_k \geq N$. Dann

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| \stackrel{(*), (**)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (n \geq n_k)$$

3 Reihen

3.1 Definition (Reihe)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$s_1 := \sum_{k=1}^n a_k \quad (n \in \mathbb{N})$$

heißt (unendliche) Reihe und wird mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

bezeichnet.

Konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty}$ bezeichnet.

[$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ steht sowohl für $\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)_{k \in \mathbb{N}}$, als auch für $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, wenn dieser Grenzwert existiert.]

[Bemerkung: Jede Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lässt sich auch als Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ schreiben, wenn wir definieren $a_1 = x_1$, $a_{k+1} = x_{k+1} - x_k$ ($k \in \mathbb{N}$).]

Beispiel

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k : \quad \sum_{k=0}^n q^k = 1 + \dots + q^n \stackrel{1.5b}{=} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Für $|q| < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1-q}$, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ($|q| < 1$).

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergiert für $|q| \geq 1$.

$$\left[\sum_{k=0}^n 1^k = n+1, \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1+(-1)^n}{2}, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} (|q| > 1) \right]$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \text{ vgl. Bsp. 1 zu 1.3 } 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Somit } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1, \text{ d.h. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

$$(c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} : \text{Nach 2.21a gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e, \text{ d.h. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

$$(d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} : \text{„Harmonische Reihe“}$$

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{k}}_{s_{2^{n-1}}} + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1}}_{\geq \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}}_{\geq \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}} = s_{2^{n-1}} + \frac{1}{2}} \\ &\geq s_{2^{n-1}} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$s_{2^0} = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1$$

3.2 Satz

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda \cdot a_k)$ konvergent und es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \cdot a_k &= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k}_{\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k} + \underbrace{\sum_{k=1}^n b_k}_{\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (n \rightarrow \infty)$$

d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Zweite Aussage analog.

Bemerkung Im allgemeinen gilt *nicht*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \text{ konvergent}$$

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}$$

ist konvergent nach dem noch zu behandelnden Leibnizkriterium, aber

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot (-1)^k \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}}_{\frac{1}{k}}$$

ist divergent (s.o).

Wir behandeln jetzt einige Konvergenzkriterien für Reihen.

3.3 Satz (Cauchy Kriterium für Reihen)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine unendliche Reihe. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq m \geq N : \quad \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \epsilon$$

3 Reihen

Beweis folgt direkt aus dem Cauchy Kriterium 2.28 für Folgen, denn

$$s_n - s_{m-1} = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^n a_k$$

Zweite Aussage analog.

Bemerkung: Aus 3.3 folgt, dass sich das Konvergenzverhalten einer Reihe nicht ändert, wenn endlich viele Glieder abgeändert werden. [Wähle N größer als die Indizes aller geänderten Glieder.]

(Der Reihengrenzwert kann sich allerdings schon ändern.)

3.4 Folgerung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Beweis: Nach dem Cauchy-Kriterium 3.3 folgt mit $m = n$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : \quad |a_n| < \varepsilon,$$

$$\text{d.h. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Beispiel: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ divergiert, weil $(-1)^k \not\rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$)

Bemerkung: Die Umkehrung in 3.4 gilt im Allgemeinen nicht, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$, aber $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert (s.o.)

3.5 Satz

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \geq 0$ ($k \in \mathbb{N}$). Dann gilt:

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ beschränkt}}_{\text{d.h. } \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkte Folge}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert}$$

Beweis

“ $\Rightarrow$ ”:

$s_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend (wg. $a_k \geq 0$) und beschränkt, also existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nach 2.15

“ $\Leftarrow$ ”:

$(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konv. $\stackrel{2.2a}{\Rightarrow} (s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt

3.6 Definition und Satz (absolute Konvergenz)

Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergent ist und es gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert, gibt es nach dem Cauchy-Kriterium 3.3 $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon \quad (n \geq m \geq N)$$

Daher

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon \quad (n \geq m \geq N)$$

und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert nach 3.3.

$$\underbrace{\left| \sum_{k=1}^n a_k \right|}_{\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n |a_k|}_{\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \ (n \rightarrow \infty)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

d.h.

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

3.7 Majorantenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ eine konvergente Reihe mit $c_k \geq 0$ ($k \in \mathbb{N}$) und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit

$$|a_k| \leq c_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und es gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

Beweis

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n c_k$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert, ist $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ beschränkt (nach 3.5). Also ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und es gilt nach 3.6

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n c_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k.$$

12.01.2010

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{Potenzreihe} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (|x| < \mathbb{R})$$

3 Reihen

Beispiel $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ ist konvergent für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

Beweis $0 \leq \frac{1}{k^m} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad (k \geq 2)$

Aus der Konvergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (Beispiel zu 3.1) folgt die Konvergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, also auch die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \left(= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)$.

[genauer:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \rightarrow 1 - \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

usw.]

Wir betrachten im Folgenden zwei Konvergenzkriterien, die als Majorante die geometrische Reihe verwenden.

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$

Quotient aufeinanderfolgender Glieder: $\left| \frac{q^{k+1}}{q^k} \right| = q < 1$

3.8 Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\left(\exists q \in]0, 1[: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \text{ für fast alle } k \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$

(b) $\left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \text{ für fast alle } k \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$

„Fast alle“ bedeutet hier mehr „alle mit Ausnahme höchstens unendlich vieler“.

Beweis:

(a) O.E.d.A.:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

3 Reihen

weil das Abändern endlich vieler Glieder zwar evtl. den Wert der Reihe, aber nicht ihr Konvergenzverhalten ändert.

Somit

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &\leq q \cdot |a_k| \leq q^2 \cdot |a_{k-1}| \leq \dots \leq q^k \cdot |a_1| \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \text{bzw. } |a_k| &\leq q^{k-1} \cdot |a_1| \quad (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent nach dem Majorantenkriterium, weil für $0 < q < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} |a_1| \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} q^k |a_1| \right)$$

konvergiert.

(b) O.E.d.A.:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad [\text{und } a_k \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N})]$$

Somit $|a_{k+1}| \geq |a_k| \geq \dots \geq |a_1| > 0$. Somit ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *keine* Nullfolge und daher nach 3.4 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3.9 Satz (Exponentialreihe)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist für $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent und es gilt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Beweis: Klar für $x = 0$. Sei $x \neq 0$ fest.

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x|}{k+1} \leq \underbrace{\frac{|x|}{|x|+1}}_{=:q < 1} \quad (k \geq |x|)$$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent.

3 Reihen

Entsprechend der Bemerkung zu 2.21 (ÜA 40) gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \\ & \leq \frac{x^2}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!} \\ & \leq \frac{1}{2n} x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \rightarrow 0 \quad (x \text{ fest!}) \end{aligned}$$

[Das Quotientenkriterium hat den Nachteil, dass fast alle $a_k \neq 0$ sein müssen. Es ist außerdem weniger leistungsfähig als das folgende Wurzelkriterium, das diesen Nachteil nicht aufweist.]

3.10 Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann gilt

- (a) $\left(\exists q \in]0, 1[: \sqrt[k]{|a_k|} \leq q \text{ für fast alle } k \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$
- (b) $\underbrace{\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1}_{\text{d.h. } |a_k| \geq 1} \text{ für unendlich viele } k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$

Beweis:

- (a) O.E.d.A.: $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad (k \in \mathbb{N})$

Also $|a_k| \leq q^k \quad (k \in \mathbb{N})$ und daher wegen $|q| < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent nach dem Majorantenkriterium.

- (b) $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k , d.h. $|a_k| \leq 1$ für unendlich viele k .

Somit ist $(|a_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ und daher $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *keine* Nullfolge. Also ist nach 3.4 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3.11 Folgerung

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 & a_k \neq 0 \text{ für fast alle } k, \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \\
 \text{(a)} \quad & a_k \neq 0 \text{ für fast alle } k, \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \\
 & \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent} \\
 \text{(b)} \quad & \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}
 \end{aligned}$$

Dabei benutzen wir folgende

3.12 Definition

Sei $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

$$\begin{aligned}
 \limsup_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty & :\Leftrightarrow (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ nach oben unbeschränkt} \\
 \liminf_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty & :\Leftrightarrow c_k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} \limsup_{k \rightarrow \infty} c_k = -\infty :\Leftrightarrow c_k \rightarrow -\infty \quad (k \rightarrow \infty) \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} c_k = -\infty :\Leftrightarrow (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ nach unten beschränkt} \end{array} \right]$$

Beweis von Satz 3.11

$$\text{(a) **Behauptung:** } \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Leftrightarrow \exists q \in]0, 1[: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \text{ für fast alle } k$$

$$\text{Setze } c_k := \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad (k \geq k_0), \quad c_\star := \liminf_{k \rightarrow \infty} c_k, \quad c^\star := \limsup_{k \rightarrow \infty} c_k$$

„ $\Leftarrow$ “: $|c_k| \leq q \quad (k \geq k_0)$. Hieraus folgt durch Betrachtung einer gegen $c^\star$ konvergierenden TF¹ von $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dass $|c^\star| \leq q$, d.h. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1$.

„ $\Rightarrow$ “ Nach Satz 2.12 gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und für fast alle k

$$c_k \in]c_\star - \varepsilon, c^\star + \varepsilon[$$

Mit $\varepsilon := \frac{1-c^\star}{2} > 0$ (wg. $c^\star < 1$) folgt $c_k \in]c_\star - \varepsilon, \frac{1+c^\star}{2}[$, also insbesondere $c_k \leq \frac{1+c^\star}{2} =: q < 1$ für fast alle k , d.h. $\exists q \in]0, 1[: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ für fast alle k .

Die Konvergenzaussage folgt aus der Behauptung und dem Quotientenkriterium 3.8a.

$$\textbf{Behauptung} \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Rightarrow \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \text{ für fast alle } k$$

¹Teilfolge

3 Reihen

Wir zeigen die Kontraposition:

Falls $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ für unendlich viele k , dann besitzt $\left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)_{k \in \mathbb{N}}$ einen H.P. in $[0, 1]$, d.h.

$$\underbrace{\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}_{\text{kleinster H.P.}} \in [0, 1]$$

Die Divergenzaussage folgt aus der Behauptung und dem Quotientenkriterium 3.8b.

(b) Die Konvergenzaussage wird analog zur Konvergenzaussage von (a) bewiesen.

Behauptung: $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k

Setze jetzt $c_k := \sqrt[k]{|a_k|}$ und $c^* := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

1. Fall: $c^* = \infty$. Dann $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt, also $c_k \geq 1$ für unendlich viele k .
2. Fall: $1 < c^* < \infty$: Da c^* H.P. von $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ liegen für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele c_k in $]c^* - \varepsilon, c^* + \varepsilon[$.

Wählt man $\varepsilon > 0$ genügend klein, so folgt wegen $c^* > 1$, dass unendlich viele $c_k > 1$ sind.

18.01.2010

Bemerkungen

- (a) Während die Konvergenzaussagen von Satz 3.11 äquivalent zu denen des Quotientenkriteriums und Wurzelkriteriums sind, sind die Divergenzaussagen schwächer.
- (b) Ist das Quotientenkriterium erfüllt, so ist auch das Wurzelkriterium erfüllt.

$$\begin{aligned} (a_k)_{k \in \mathbb{N}} & \text{ erfüllt Quotientenkriterium} \\ \Rightarrow |a_k| & \leq q \cdot |a_{k-1}| \leq q^2 |a_{k-2}| \leq \dots \leq q^{k-1} |a_1| = \frac{|a_1|}{q} \cdot q^k \\ \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} & \leq q \cdot \underbrace{\sqrt[k]{\frac{|a_1|}{q}}}_{\rightarrow 1 \quad (k \rightarrow \infty)} \end{aligned}$$

Also

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1.$$

3 Reihen

Nach 3.11 b ist das äquivalent zum Wurzelkriterium (vgl. Bemerkung (a)).

(c) In (b) gilt im allgemeinen *nicht* die Umkehrung:

$$\begin{aligned} q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + \dots & \quad (|q| < 1) \\ q^2 + q^1 + q^4 + q^3 + \dots \end{aligned}$$

konvergent nach dem Wurzelkriterium und zeigt darüber hinaus, dass in der Divergenzaussage das Quotientenkriterium „fast alle“ nicht durch „unendlich viele“ ersetzt werden kann.

Das Wurzelkriterium ist also leistungsfähiger als das Quotientenkriterium.

(d) Im Fall $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$ bzw. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$ kann dann sowohl Divergenz als auch Konvergenz vorliegen:

$$\begin{aligned} a_k = \frac{1}{k} & \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert (Bsp. d zu 3.1)} \\ a_k = \frac{1}{k^2} & \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert (Bsp. d zu 3.1)} \end{aligned}$$

Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ zeigt ebenfalls, dass das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium *nicht* zu

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad \text{bzw.} \quad \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

abgeschwächt werden können.

3.13 Rechenregeln für $\limsup$ und $\liminf$ (Auswahl)

Seien $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned} a_k \leq b_k \quad (k \in \mathbb{N}) & \Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k \\ \left[a_k \leq b_k \quad (k \in \mathbb{N}) \right] & \Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k) & \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k + \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k \\ [\liminf_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k)] & \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k + \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k \end{aligned}$$

3 Reihen

(c)

$$\begin{aligned} a_k \geq 0, b_k \geq 0 \quad (k \in \mathbb{N}) &\Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} (a_k \cdot b_k) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k \\ [a_k \geq 0, b_k \geq 0 \quad (k \in \mathbb{N})] &\Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} (a_k \cdot b_k) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \cdot \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k \end{aligned}$$

(d)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (-a_k) = -\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k, \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} (-a_k) = -\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$$

Falls $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ oder $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert, gilt in (b) und (c) sogar Gleichheit.

Beweis

(a)-(c) 1. Teil: Übung, Tutorium 2. Teil: analog

(d) Zeige:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (-a_k) = -\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$$

Wähle TF $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $a_{k_j} \rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \quad (j \rightarrow \infty)$

Dann $-a_{k_j} \rightarrow -\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \quad (j \rightarrow \infty)$, also ist $-\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$ ein H.P. von $(-a_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Da $\limsup_{k \rightarrow \infty} (-a_k)$ der größte H.P. von $(-a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist, folgt:

$$-\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (-a_k) \quad (\star)$$

Wähle jetzt eine Teilfolge von $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, wieder mit $(a_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ bezeichnet mit

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt} \quad -a_{k_j} &\rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} (-a_k) & (j \rightarrow \infty) \\ a_{k_j} &\rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} (-a_k) & (j \rightarrow \infty) \\ &\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{H.P. von } (a_k)_{k \in \mathbb{N}}} \\ \text{also} \quad \liminf_{k \rightarrow \infty} &\leq -\limsup_{k \rightarrow \infty} (a_k) \quad , \\ \text{woraus} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} (-a_k) &\leq -\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k & (\star\star) \\ \text{folgt.} \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich aus $(\star)$ und $(\star\star)$

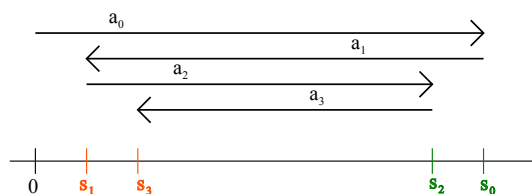
Quotientenkriterium, Wurzelkriterium und Majorantenkriterium liefern absolute Konvergenz. Das Leibnitzkriterium ist auf bestimmte *nicht* absolut konvergente Reihen anwendbar.

3.14 Leibnitzkriterium

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge (also gilt insbesondere $a_k \geq 0 \quad (k \in \mathbb{N}_0)$).

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

[Beweisidee: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots, a_0 \geq a_1 \geq a_2 \dots, s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$]



Beweis

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k \\
 s_{n+2} - s_n &= \underbrace{(-1)^{n+2} a_{n+2}}_{=(-1)^n} (-1)^{n+1} a_{n+1} \\
 &= (-1)^n \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+1})}_{\leq 0} = \begin{cases} \leq 0 & n \text{ gerade} \\ \geq 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}
 \end{aligned}$$

also $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton fallend, $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.

$$s_{2n+1} - s_{2n} = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \leq 0$$

d.h. $s_{2n+1} \leq s_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

Die Intervalle $I_n := [s_{2n+1}, s_{2n}]$ bilden eine Intervallschachtelung, denn:

x

$$\begin{aligned}
 s_{2n-1} \leq s_{2n+1} &\leq s_{2n} \leq s_{2n-2} \quad (n \in \mathbb{N}), \text{ d.h.} \\
 I_n &< I_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}) \\
 \text{bzw. } I_{n+1} &< I_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)
 \end{aligned}$$

3 Reihen

x

$$\underbrace{|I_n|}_{\text{Länge von } I_n} = s_{2n} - s_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Also existiert $s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$ und nach Lemma 2.10 folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s$$

Hieraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$.

[Letzteres wegen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = s \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n'_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n'_0 : |s_{2n+1} - s| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = s \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n''_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n''_0 : |s_{2n} - s| < \varepsilon$$

Also für vorgegebenes $\varepsilon > 0$

$$|s - s_1| < \varepsilon \quad n \geq \underbrace{\max(2n'_0 + 1, 2n''_0)}_{n_0}$$

]

Bemerkung:

$$(a) \text{ Es gilt: } |s_n - s| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

[Denn: 1.F.: n gerade, d.h. $n = 2m$

$$s \in \underbrace{I_m}_{[s_{2m+1}, s_{2m}]} \quad (\text{denn: } s \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_k)$$

$$|s - \underbrace{s_{2m}}_{s_n}| \leq |I_m| = a_{2m+1} = a_{n+1}$$

2. Fall: n ungerade, $n = 2m - 1$.

$s \in I_m = [s_{2m+1}, s_{2m}]$ Teilmengezeichen $[s_{2m-1}, s_{2m}]$ (weil $(s_{2m+1})_{m \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend)

3 Reihen

$$\Rightarrow \underbrace{|s - s_{2m-1}|}_{s_n} \leq |s_{2m} - s_{2m-1}| = \underbrace{a_{2m}}_{a_{n+1}}$$

(b) Die Konvergenzaussage des Leibnizkriteriums gilt für jede Reihe $\sum_{k=k_0}^n b_k$, für die

$b_k \cdot b_{k+1} \leq 0 \quad (k \geq k_0)$	alternierend
$ b_k \geq b_{k+1} \quad (k \geq k_0)$	Beträge der Reihenglieder monoton fallend
$b_{k \rightarrow 0} \quad (k \rightarrow \infty)$	Nullfolge

Beispiele

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \underbrace{=}_{\text{später}} \ln 2$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium, aber *nicht* absolut.

(b)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \underbrace{=}_{\text{später}} \frac{\pi}{4} \quad \text{Leibnizreihe}$$

[ebenfalls keine absolute Konvergenz]

3.15 Umordnungssatz

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe, $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.

Dann ist auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$[a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{k=1}^4 a_k$$

3 Reihen

$$a_3 + a_2 + a_4 + a_1 = \sum_{k=1}^4 a_{\sigma(k)}$$

$$\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1$$

σ : bijektiv (Permutation)]

Beweis:

(1.) Sei zunächst $a_k \geq 0 \quad (k \in \mathbb{N})$.

Wegen σ injektiv sind $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ paarweise verschieden und es folgt

$$\sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^N a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$[N := \max(\sigma(1), \dots, \sigma(k))]$$

Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (\star)$$

Der selbe Schluss lässt sich auch auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ mit der Umordnung σ^{-1} anwenden. Aus $(\star)$ folgt daher

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{a_{\sigma^{-1}(\sigma(k))}}_{a_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \quad (\star\star)$$

Also folgt aus $(\star)$ und $(\star\star)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(2.) Der allgemeine Fall wird durch die Zerlegung

$$a_k = \underbrace{\frac{1}{2}(|a_k| + a_k)}_{b_{k:=}} - \underbrace{\frac{1}{2}(|a_k| - a_k)}_{c_k}$$

3 Reihen

auf 1. zurückgeführt.

Wegen $b_k, c_k \geq 0$ und $b_k, c_k \leq |a_k|$ sind $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt nach 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)}, \sum_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)}$ konv. Reihen sind, gilt das nach 3.2. auch für

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(b_{\sigma(k)} + c_{\sigma(k)})}_{|a_{\sigma(k)}|} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(b_{\sigma(k)} - c_{\sigma(k)})}_{a_{\sigma(k)}}.$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} &= \sum_{k=1}^{\infty} (b_{\sigma(k)} - c_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{\sigma(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - c_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \end{aligned}$$

19.01.2010

Bemerkung Für *nicht* absolut konvergente Reihen gilt der Umordnungssatz im allgemeinen nicht. Nach RIEMANN gilt sogar folgende Aussage:

Jede konvergente, aber *nicht* absolut konvergente Reihe kann so umgeordnet werden, dass sie gegen eine beliebige vorgegebene reelle Zahl konvergiert.

3.16 Satz (Cauchy-Produkt)

Seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

3 Reihen

absolut konvergente Reihen.

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$c_k := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}}_{c_k}$$

[Merkregel: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0, j \geq 0, i+j=k}^{\infty} a_i b_j$]

Skizze:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots & a_0 b_k & \cdots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & & \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & & \\ \vdots & & & & & \\ a_k b_0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Beweis: Bilde im obigen Schema die Hilfsfolge $(d_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$

$$\left(\begin{array}{ccc} d_0 & d_3 & d_8 \\ d_1 & d_2 & d_7 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ \vdots & & \\ d_{n^2} & d_{n^2+1} & \cdots \end{array} \right) \quad d_{(n+1)^2-1}$$

$$\begin{array}{lcl} d_0 & = & a_0 b_0 \\ d_1 & = & a_1 b_0 \\ d_2 & = & a_1 b_1 \\ d_3 & = & a_0 b_1 \\ d_4 & = & a_2 b_0 \\ & \vdots & \end{array}$$

Wegen

$$\sum_{l=0}^{(n+1)^2-1} |d_l| = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_i b_j| = \underbrace{\sum_{i=0}^n |a_i|}_{\rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} a_i} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^n |b_j|}_{\rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} b_j} \quad (n \rightarrow \infty)$$

ist die Reihe $\sum_{l=0}^n d_l$ absolut konvergent.

Entsprechend:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n d_l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{(n+1)^2-1} d_l \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot \sum_{j=0}^n b_j \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n b_j \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j \end{aligned}$$

$(d_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ kann folgendermaßen umgerechnet werden:

$$\mathbf{d}_{\sigma(0)} \quad \mathbf{d}_{\sigma(2)} \quad \mathbf{d}_{\sigma(5)} \quad \cdots \quad \mathbf{d}_{\sigma\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right)}$$

$$\mathbf{d}_{\sigma(1)} \quad \mathbf{d}_{\sigma(4)}$$

$$\mathbf{d}_{\sigma(3)}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{d}_{\sigma\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

d.h. $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2, \sigma(5) = 8, \dots$

Also nach dem Umordnungssatz

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} d_l &= \sum_{l=0}^{\infty} d_{\sigma(l)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1} d_{\sigma(l)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \end{aligned}$$

3 Reihen

Bemerkung Auch beim Cauchy-Produkt ist die Voraussetzung absolute Konvergenz im allgemeinen *nicht* verzichtbar.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}_{\text{konv. nach Leibnitzkrit.}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} < \infty$$

$$\begin{aligned} |c_k| &= \left| \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \cdot \frac{(-1)^{k-i}}{\sqrt{k-i+1}} \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^k}{\sqrt{i+1}\sqrt{k-i+1}} \right| \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{(i+1)(k-i+1)}} \\ &\geq \sum_{i=0}^k \frac{1}{\frac{i+1+k-i+1}{2}} \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{2}{k+2} \\ &= 2 \cdot \underbrace{\frac{k+1}{k+2}}_{\rightarrow 1 \ (k \rightarrow \infty)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Daher divergiert $\sum_{i=0}^k c_k$.

Potenzreihen

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Unter einer Potenzreihe verstehen wir die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($x \in \mathbb{R}$).

Beispiel:

$$\begin{aligned} a_k &= 1 && \text{geometrische Reihe} \\ a_k &= \frac{1}{k!} && \text{Exponentialreihe} \\ a_k &= \begin{cases} \frac{1}{k!} & k = 2l \quad (l \in \mathbb{N}_0) \\ 0 & k = 2l + 1 \quad (l \in \mathbb{N}_0) \end{cases} && \text{Cosinus hyperbolicus} \end{aligned}$$

[Die erste Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$, wogegen die beiden folgenden Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.]

3.17 Satz (Konvergenzradius von Potenzreihen)

Sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

eine Potenzreihe. Dann gibt es genau ein $R \in [0, \infty]$ (Bezeichnung: Konvergenzradius), so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $|x| < R$ absolut konvergiert *und* für $|x| > R$ divergiert. Es gilt:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

wenn man *hier* $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ setzt.

Falls die Folge

$$\left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

konvergiert oder bestimmt (gegen ∞) divergiert, gilt außerdem

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$$

(ebenfalls mit $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$)

Beweis

1.F.: $0 < \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \infty$:

Nach der Folgerung 3.11b (Wurzelkriterium) gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert, falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1, \quad \text{d.h.} \quad |x| \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

$$\text{oder} \quad |x| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ divergiert, falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} > 1, \quad \text{d.h.} \quad |x| > \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

2.F.: $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$. Daher $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

3 Reihen

Nach Folgerung 3.11b (Wurzelkriterium) folgt Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. für alle x mit $|x| < \infty \stackrel{\text{s.O.}}{=} \frac{1}{0} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$.

3.F.: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$. Also ebenfalls $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \infty \quad (x \neq 0)$.

Somit Divergenz nach 3.11b von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \neq 0$, d.h. $|x| > 0 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$.

Im Falle der Anwendbarkeit des Quotientenkriteriums (Folgerung 3.11a), d.h. falls

$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert in $[0, \infty]$ folgt, dass

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent für $|x| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$.

Wegen der Eindeutigkeit des Konvergenzradius' folgt

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$$

Beispiel:

(a) $a_k = 1 \quad (k \in \mathbb{N}_0) : \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \Rightarrow R = 1$

(b) $a_k = \frac{1}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0) : \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$

(c) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} & k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| < \infty$

Nach dem Majorandenkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $R = \infty$.

3.18 Hilfssatz

(a) Sei I ein Intervall, $L < \infty$, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Falls $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in I)$, dann ist f Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L .

(b) Sei I ein Intervall, $g_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L_k . Falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

3 Reihen

für jedes $x \in I$ und $\sum_{k=1}^{\infty} L_k < \infty$ vorliegt, dann ist die Funktion $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ ($x \in I$) lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\sum_{k=1}^{\infty} L_k$.

Beweis

$$(a) \underbrace{|f_n(x) - f_n(\bar{x})|}_{\rightarrow f(x)} \leq L|x - \bar{x}| \quad (x, \bar{x} \in I, n \in \mathbb{N})$$

$$\text{d.h. } |f(x) - f(\bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|$$

$$(b) \text{ Betrachte } f_n(x) := \sum_{k=1}^n g_k(x) \quad (x \in I)$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ für jedes $x \in I$ konvergent, d.h.

$$\sum_{k=1}^n g_k(x) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) =: f(x).$$

$$|f_n(x) - f_n(\bar{x})| = \left| \sum_{k=1}^n (g_k(x) - g_k(\bar{x})) \right| \leq \sum_{k=1}^n |g_k(x) - g_k(\bar{x})| \leq \sum_{k=1}^n L_k |x - \bar{x}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} L_k \right) (x - \bar{x})$$

Also sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt und die Behauptung folgt.

Bemerkung: Aus $f_n : I \rightarrow R$ lipschitzstetig und $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) folgt im Allgemeinen *nicht*, dass $f : I \rightarrow R$ lipschitzstetig ist.

Beispiel: $f_n(x) = x^n$ ($x \in [0, 1]$) f_n ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $n - 1$

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} =: f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

to be continued...

Inhaltsverzeichnis

0	Grundlagen	4
0.1	Gesetze der Aussagenlogik	9
0.2	Schlussweisen	10
0.3	Allgemeingültige Aussagen	11
0.4	Mengenoperationen	14
0.5	Folgerung (Mengenoperationen)	15
0.6	Regeln (Mengenoperationen)	16
0.7	Satz (Mengenoperationen)	17
0.8	Folgerung (Complement)	18
0.9	Definition (Indexmengen)	18
0.10	Regeln (Durchschnitt und Vereinigung von Indexmengen)	19
0.11	Kartesische Produkte	20
0.12	Abzählungen einiger endlicher Mengen	21
0.13	Folgerung (Fakultät, Binomialkoeffizient)	21
0.14	Satz (Mengen)	23
0.15	Relationen und Funktionen	25
0.16	Definition (Umkehrrelation)	26
0.17	Abbildung, Funktion	26
0.18	Bezeichnungen	28
0.19	Bild, Urbild	28
0.20	Verkettung von Abbildungen	28
0.21	Satz - Assoziativität der Verkettung	29
0.22	Definition	30
0.23	Lemma	31
0.24	Umkehrfunktion	32
0.25	Satz	33
1	Reelle Zahlen	35
1.1	Definition (Subtraktion und Division)	36
1.2	Rechenregeln	36
1.3	Summen-, Produkt- und Potenzschreibweise	38
1.4	Binomischer Satz	43
1.5	Geometrische Summenformel	44
1.6	Definition (Polynom vom Grad n)	45
1.7	Satz	45
1.8	Definition	48

Inhaltsverzeichnis

1.9	Rechenregeln (Auszug)	48
1.10	Definition (Betrag von x)	50
1.11	Folgerungen	50
1.12	Satz (Dreiecksungleichung)	51
1.13	Definition (min M , max M)	52
1.14	Lemma	53
1.15	Prinzip der vollständigen Induktion	53
1.16	BERNOULLISCHE Ungleichungen	54
1.17	Potenzsummen	55
1.18	Folgerung	58
1.19	Definition (Intervallschachtelung)	60
1.20	B -adische Entwicklung (für reelle Zahlen $\in [0, 1]$)	61
1.21	Definition (Lipschitzstetigkeit)	63
1.22	Zwischenwertsatz (Vorläufige Fassung)	67
1.23	COROLLAR (Vorläufige Fassung)	70
1.24	(k -te Wurzel)	70
2	Folgen und Grenzwerte	73
2.1	Definitionen (Grenzwert, Limes)	73
2.2	Folgerung	73
2.3	Satz	75
2.4	Lemma	76
2.5	Rechenregeln I	77
2.6	Rechenregeln II (vorläufige Fassung)	79
2.7	Einige Grenzwerte	80
2.8	Definition (Häufungspunkt)	82
2.9	Folgerung	83
2.10	Lemma	84
2.11	Satz von Bolzano-Weierstraß (1. Fassung)	85
2.12	Satz von Bolzano-Weierstraß (2. Fassung)	85
2.13	Folgerung	86
2.14	Definition (monotone Folgen)	87
2.15	Satz (Konvergenz beschränkter monotoner Folgen)	87
2.16	Definition (Teilfolge)	88
2.17	Folgerung	89
2.18	Satz von Bolzano-Weierstraß (3. Fassung)	89
2.19	Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel	90
2.20	Folgerung	90
2.21	Definition und Satz	90
2.22	Folgerung	94
2.23	Satz und Definition	97
2.24	Satz	99
2.25	Definition	101

Inhaltsverzeichnis

2.26	Satz (Wachstumsverhalten der Exponentialfunktion und des Logarithmus)	102
2.27	Definition (Cauchyfolge)	104
3	Reihen	106
3.1	Definition (Reihe)	106
3.2	Satz	107
3.3	Satz (Cauchy Kriterium für Reihen)	108
3.4	Folgerung	109
3.5	Satz	109
3.6	Definition und Satz (absolute Konvergenz)	110
3.7	Majorantenkriterium	111
3.8	Quotientenkriterium	112
3.9	Satz (Exponentialreihe)	113
3.10	Wurzelkriterium	114
3.11	Folgerung	114
3.12	Definition	115
3.13	Rechenregeln für $\limsup$ und $\liminf$ (Auswahl)	117
3.14	Leibnitzkriterium	119
3.15	Umordnungssatz	121
3.16	Satz (Cauchy-Produkt)	123
3.17	Satz (Konvergenzradius von Potenzreihen)	127
3.18	Hilfssatz	128

Index

- Äquivalenz, 7
- übliche Ergänzung, 8, 9

- Abbildung, 26
- Abbildungsvorschrift, 27
- abgeschlossenes Intervall, 59
- absolute Konvergenz, 110
- Allgemeingültige Aussage, 9, 11
- Anordnungsaxiome, 35, 48
- Archimedisches Axiom, 13, 57, 75
- Assoziativgesetz, Mengen, 16
- Assoziativgesetze, Aussagenlogik, 10
- Assoziativität der Verkettung, 29
- Aussagenbegriff, 5
- Aussagenlogik, 5
- Axiome, 35

- B-adische Entwicklung, 61, 84
- B-adische Entwicklung von x , 63
- Berechnung der Binomialkoeffizienten, 23
- Bernoulli-Ungleichung, 59, 92
- Bernoulli-Zahlen, 57
- Bernoullische Ungleichungen, 54
- Beschränkte Intervalle, 59
- Betrag, 50
- Beweis durch Ausschr. d. Summe, 41
- bijektiv, 30
- Bild, 28
- binäre Relation, 25
- Binomialkoeffizient, 21
- Binomischer Satz, 43, 54
- Bolzano-Weierstraß, 85, 89

- Cauchyfolge, 104
- Cauchy Kriterium, 104
- Cauchy Kriterium für Reihen, 108
- Complement, 18

- Corollar, 70

- Definitionsbereich, 27
- DeMorgansche Regeln, 10
- Differenz, 7
- Distributivgesetz, Mengen, 16
- Distributivgesetze, Aussagenlogik, 10
- Distributivgesetzes, 40
- divergent, 73
- Division, 36
- Doppelte Verneinung, 10
- Dreiecksungleichung, 51, 66
- Durchschn. u. Vereinig. v. Indexmengen, 19
- Durchschnitt, 7

- Einbettung, 28
- Eindeutigkeit, 59
- Einschränkung, 28
- epsilon-Umgebung, 73
- Existenz, 58
- Existenz, Eindeutigkeit d. inv. Elemente, 35
- Existenz, Eindeutigkeit d. neutr. Elemente, 35
- Exponentialfunktion, 90

- Fakultät, 21
- Fibonacci-Folge, 56
- floor, 58
- Folge von Ziffern zur Basis B , 61
- Folgebegriff, reflexive Definition, 56
- Folgeglieder, 73
- Folgen und Grenzwerte, 73
- Folgen und Grenzwerte, Rechenregeln I, 77
- Folgen und Grenzwerte, Rechenregeln II, 79
- Funktionen, 25
- Funktionswert, 27

- Gauß-Klammer von x , 58

- genau dann, wenn, 7
- Geometrische Summenformel, 44
- Gesetze der Aussagenlogik, 9
- Grad des Polynoms, 45
- Graph, 27
- Grenzwert, 73
- Grenzwert einer Folge, 75
- Grenzwerte, 80

- Häufungspunkt, 82
- Höchstkoeffizient, 45
- halboffenes Intervall, 59
- Harmonische Reihe, 107

- Identität, 28
- Implikation, 8
- Indexmengen, 18
- Indexmengen, Durchschnitt, 18
- Indexmengen, Vereinigung, 18
- Indextransformation, 44
- Induktionsanfang*, 53
- Induktionsannahme, 54
- Induktionsschluss*, 53
- injektiv, 30
- Inklusion, 28
- Intervall, abgeschlossenes, 59
- Intervall, halboffenes, 59
- Intervall, offenes, 59
- Intervallschachtelung, 60

- k-te Wurzel, 70
- Körperaxiome, 35
- Kartesische Produkte, 20
- Kartesisches Produkt in Mengen, 21
- Kommutativgesetz der Multiplikation, 43
- Kommutativgesetz, Mengen, 16
- Kommutativgesetze, Aussagenlogik, 10
- Kontrapositionsgesetz, 11
- konvergent, 73
- konvergente unendlichen Reihe, 63
- Konvergenz beschr. monot. Folgen, 87

- L (Lipschitzkonstante), 64
- Limes, 73
- limes inferior, 85
- limes superior, 85
- linksassoziativ, 41
- Lipschitzkonstante, 64
- lipschitzstetig, 63
- Lipschitzstetigkeit, 63

- max M, 52
- Menge aller Teilmengen, 14
- Mengen, 4
- Mengenbegriff, 4
- Mengengleichheit, 5
- Mengengleichheit formal, 14
- Mengenoperationen, 6, 15, 17
- Mengenproblem, 4
- min M, 52
- Mittelpunkt, 68
- monoton fallend, 87
- monoton wachsend, 87
- monotone Folgen, 87
- Motivation der Exponentialfunktion, 90

- nicht beschränkte Funktion, 67
- Nicht-Operator, 6
- notwendig und hinreichend, 7
- Nullfolge, 73
- Nullpolynom, 45
- Nullstelle, 45, 47

- offenes Intervall, 59
- Ohne Einschränkung der Allgemeinheit, 70

- Paare genau dann gleich, wenn, 20
- Paare und Mengen sind verschieden, 21
- Pascalsche Dreieck, 23
- Polynom vom Grad n, 45
- Polynome vom Grad 0, 47
- positiv, 48
- Potenzmenge, 14
- Potenzschreibweise, 38
- Potenzsummen, 55, 57
- Prädikate, 5
- Produktschreibweise, 38

- Quantoren, 12
- Quantoren über Mengen, 20

- Quantorenschreibweise, 12
- Quelle, 27
- Rechenregeln für Summen, 42
- Reelle Zahlen, 35
- Reelle Zahlen, Assoziativgesetze, 35
- Reelle Zahlen, Distributivgesetz, 36
- Reelle Zahlen, Kommutativgesetze, 35
- reelle Zahlen, Rechenregeln, 48
- reellwertige Funktionen, 27
- Reihe, 106
- rekursiv definierte Folgen, 62
- Rekursive Definition der Intervalle, 68
- rekursive Definition einer Folge, 57
- Relation auf X , 25
- Relationen, 25
- Restriktion, 28
- Satz des Eudoxos, 58
- Satz von Bolzano-Weierstraß, 85, 89
- Schlussweisen, allgemeingültig, 10
- schnelles Potenzieren, 30
- Schranke, 65
- Sehnensteigungen, 64
- Spaltenweise Summierung, 46
- stetig, 66
- Stetigkeit, 80
- Stetigkeitsbegriff, 66
- Subtraktion, 36
- Summenschreibweise, 38
- surjektiv, 30
- Tableau, 46
- Tautologie, 9
- Teilfolge, 88
- Teilmenge, 14
- Tripel, 25
- Tupel, 21
- Umkehrdarstellung, 32
- Umkehrfunktion, 28, 32
- Umkehrrelation, 26
- Uneingeschränkte Intervalle, 59
- unendlich, 57
- Ungleichung (arithm. u. geom. Mittel), 90
- universelle Quantoren, 14
- Urbild, 28
- Vereinigung, 7
- Verkettung von Abbildungen, 28
- Vollständige Induktion, 63
- vollständige Induktion, 52, 53
- Vollständigkeitsaxiom, 60
- Vollständigkeitsaxiome, 35
- Vorlesung 01 vom 19.10.2009, 4
- Vorlesung 02 vom 20.10.2009, 8
- Vorlesung 03 vom 26.10.2009, 11
- Vorlesung 04 vom 27.10.2009, 16
- Vorlesung 05 vom 02.11.2009, 20
- Vorlesung 06 vom 03.11.2009, 25
- Vorlesung 07 vom 09.11.2009, 29
- Vorlesung 08 vom 10.11.2009, 35
- Vorlesung 09 vom 16.11.2009, 40
- Vorlesung 10 vom 17.11.2009, 46
- Vorlesung 11 vom 23.11.2009, 52
- Vorlesung 12 vom 24.11.2009, 57
- Vorlesung 13 vom 30.11.2009, 62
- Vorlesung 14 vom 01.12.2009, 69
- Vorlesung 15 vom 07.12.2009, 74
- Vorlesung 16 vom 08.12.2009, 79
- Vorlesung 17 vom 14.12.2009, 84
- Vorlesung 18 vom 15.12.2009, 88
- Vorlesung 19 vom 21.12.2009, 93
- Vorlesung 20 vom 22.12.2009, 98
- Vorlesung 21 vom 11.01.2010, 104
- Vorlesung 22 vom 12.01.2010, 111
- Vorlesung 23 vom 18.01.2010, 116
- Vorlesung 24 vom 19.01.2010, 123
- Vorrangregel, 9
- Wahrheitstafeln, 8
- Wertebereich, 27
- Zeilenweise Summerierung, 47
- Ziel, 27
- Ziffer zur Basis B , 61
- Zusammengesetzte Aussagen, 6
- Zwischenwertsatz, 67