

Hinweis: Dies ist eine *inoffizielle*, vorläufige Zusammenfassung des Vorlesungsstoffs. Aktuelle Mitschriften, eine Fehlermeldeseite sowie Updates gibt es im MedienInfo-Wiki unseres Semesters: www.miwiki.de.vu

Cheatsheet

Analysis für Informatiker und Statistiker

WS 2009/2010

Dozent: Dr. Walter Spann

Satz: Das Analysis T_EX Team*

Stand: §0 bis einschließlich §2

9. Februar 2010

*Beteiligte:

L^AT_EX-Satz: Marc Winking, Sebastian Straub, Frederic Kettelhoit, Sascha Böckmann

Grafiken: Elisabeth Friedrich, Harald Brunner

Cheatsheet: Thomas Gorny

0 Grundlagen

Aussagenlogik

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

$\mathcal{A}$	$\neg \mathcal{A}$
w	f
f	w

Mengenoperationen

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$	$:= \{x : x \in \mathcal{A} \wedge x \in \mathcal{B}\}$	Durchschnitt
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	$:= \{x : x \in \mathcal{A} \vee x \in \mathcal{B}\}$	Vereinigung
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$	$:= \{x : x \in \mathcal{A} \wedge x \notin \mathcal{B}\}$	„Differenz von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ “, $\mathcal{A}$ ohne $\mathcal{B}$
$x \notin \mathcal{A}$	ist gleichbedeutend mit	$\neg (x \in \mathcal{A})$

Äquivalenz

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Implikation: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	Bedeutung
w	w	w	„aus richtigem folgt richtiges“
w	f	f	„aus richtigem kann nichts falsches folgen“
f	w	w	übliche Ergänzung - „Ex falso quodlibet“,
f	f	w	also „aus Falschem folgt Beliebiges“

Vorrangregel:

$$\frac{\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow}{\text{abnehmender Vorrang}} \Leftrightarrow$$

0.1 Gesetze der Aussagenlogik

- (a) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ } Kommutativgesetze
- (b) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ }
- (c) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ } Assoziativgesetze
- (d) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ }
- (e) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ } Distributivgesetze
- (f) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ }
- (g) $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg \mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}$ } DeMORGANSche Regeln
- (h) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{B}$ }
- (i) $\neg \neg \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ } Doppelte Verneinung

0.2 Schlussweisen

- (a) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$
- (b) $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C})$
- (c) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$

0.3 Allgemeingültige Aussagen

- (a) $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \Leftrightarrow \neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
- (b) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg \mathcal{B} \Rightarrow \neg \mathcal{A}$ Kontrapositionsgesetz

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{A} \vee f \Leftrightarrow \mathcal{A}, \mathcal{A} \wedge f \Leftrightarrow f$$

Quantoren

$$\neg(\forall x \in M : \mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg \mathcal{A}(x)$$

$$\neg(\exists x \in M : \mathcal{A}(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg \mathcal{A}(x)$$

$$\forall x \in M \forall y \in N : \mathcal{A}(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in N \forall x \in M : \mathcal{A}(x, y)$$

$$\forall x \in M : \mathcal{A}(x) :\Leftrightarrow \forall x : x \in M \Rightarrow \mathcal{A}(x)$$

$$\exists x \in M : \mathcal{A}(x) :\Leftrightarrow \exists x : x \in M \wedge \mathcal{A}(x)$$

$$\neg \forall x : \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg \mathcal{A}(x)$$

$$\neg \exists x : \mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg \mathcal{A}(x)$$

$$\forall x : (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge B$$

$$\forall x : (A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee B$$

$$\exists x : (A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \wedge B$$

$$\exists x : (A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \vee B$$

$$\forall x : (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\forall x : \mathcal{B}(x))$$

$$\exists x : (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \vee (\exists x : \mathcal{B}(x))$$

Nicht allgemeingültig sind

$$\forall x : (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\forall x : \mathcal{A}(x)) \vee (\forall x : \mathcal{B}(x))$$

$$\exists x : (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\exists x : \mathcal{A}(x)) \wedge (\exists x : \mathcal{B}(x))$$

0.4 Mengenoperationen

- (a) $A = B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$ Mengengleichheit formal
- (b) $A \subset B \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ A Teilmenge von B
- (c) $\mathcal{P}(A) \quad := \quad \{M : M \subset A\}$ Potenzmenge von A : Menge aller Teilmengen von A

0.5 Folgerung (Mengenoperationen)

$$(a) \quad A \subset B \wedge B \subset A \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

$$(b) \quad A \subset B \wedge B \subset C \quad \Leftrightarrow \quad A \subset C$$

0.6 Regeln (Mengenoperationen)

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad A \cup B = B \cup A \\ (b) \quad A \cap B = B \cap A \end{array} \right\} \text{Kommutativgesetz}$$

$$\left. \begin{array}{l} (c) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (d) \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right\} \text{Assoziativgesetz}$$

$$\left. \begin{array}{l} (e) \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (f) \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{array} \right\} \text{Distributivgesetz}$$

$$A \cup A = A, A \cap A = A, A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$$

0.7 Satz (Mengenoperationen)

$$(a) \quad M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$$

$$(b) \quad M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$$

$$(c) \quad M \setminus (M \setminus A) = M \cap A$$

0.8 Folgerung (Complement)

Seien A, B, M Mengen, $A \subset M, B \subset M$. $\mathbb{C}_M A := M \setminus A, \mathbb{C}_M B := M \setminus B$

$$(a) \quad \mathbb{C}_M (A \cup B) = \mathbb{C}_M A \cap \mathbb{C}_M B$$

$$(b) \quad \mathbb{C}_M (A \cap B) = \mathbb{C}_M A \cup \mathbb{C}_M B$$

$$(c) \quad \mathbb{C}_M \mathbb{C}_M A = A$$

0.9 Definition (Indexmengen)

Sei I eine nicht leere (Index-)Menge und A_i für jede $i \in I$ eine Menge. Dann

$$(a) \quad \bigcup_{i \in I} A_i := \underbrace{\{x : \exists i \in I : x \in A_i\}}_{\text{Vereinigung der Mengen } A_i (i \in I)}$$

Menge aller x , die in mind. einem A_i enthalten sind

$$(b) \quad \bigcap_{i \in I} A_i := \underbrace{\{x : \forall i \in I : x \in A_i\}}_{\text{Durchschnitt der Mengen } A_i (i \in I)}$$

Menge aller x , die in jedem A_i enthalten sind.

1. Falls $I = \{1, \dots, n\}$, dann gilt

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\text{und} \quad \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

0.10 Regeln (Durchschnitt u. Vereinigung von Indexmengen)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup M = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup M) \\
 \text{(b)} \quad & \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap M = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap M) \\
 \text{(c)} \quad & \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap M = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap M) \\
 \text{(d)} \quad & \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cup M = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup M) \\
 \text{(e)} \quad & M \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (M \setminus A_i) \\
 \text{(f)} \quad & M \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (M \setminus A_i)
 \end{aligned}$$

0.11 Definition (Kartesisches Produkt von Mengen)

Seien $A_1, \dots, A_k$ endlich viele Mengen ($k \geq 2$). Dann heißt

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k := \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : \forall i \in \{1, \dots, k\} : a_i \in A_i\}$$

das Kartesische Produkt der Mengen $A_1, \dots, A_k$.

Falls $A_1 = A_2 = \dots = A_k$, schreibt man $A^k := A \times \dots \times A$ und setzt $A^1 := A$.

0.12 Abzählungen einiger endlicher Mengen

Fakultät, Binomialkoeffizient

(a)

$$n! := n \times (n-1) \times \dots \times 1 \quad (n \in \mathbb{N}, 0! := 1)$$

(b)

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, 0! := 1).$$

0.13 Folgerung (Fakultät, Binomialkoeffizient)

(a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot \overbrace{(n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k!} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$$

(b)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, k \leq n)$$

0.14 Satz (Mengen)

Sei A eine Menge aus n Elementen, $n \in \mathbb{N}$. (Schreibweise $\underbrace{|A|}_{\text{Anzahl der Elemente}} = n$). Sei $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

(a)

$$|A^k| = \left| \underbrace{(x_1, \dots, x_k)}_{\text{k-Tupel aus Elementen von } A} : x_1, \dots, x_k \in A \right| = n^k$$

(b)

$$\begin{aligned}
 & \left| \underbrace{(x_1, \dots, x_k)}_{\text{k-Tupel ohne Wiederholung aus Elementen von } A} : x_1, \dots, x_k \in A, \underbrace{\forall i \neq j : x_i \neq x_j}_{x_1, x_2 \text{ paarweise verschieden}} \right| \\
 & = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \text{ für } 1 \leq k \leq n
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 & \left| \underbrace{\{x_1, \dots, x_k\}}_{\text{k-elementige Teilmenge von } A} : x_1, \dots, x_k \in A, \forall i \neq j : x_i \neq x_j \right| \\
 & = \binom{n}{k} \text{ für } 0 \leq k \leq n
 \end{aligned}$$

(d)

$$\left| \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\text{Potenzmenge = Menge aller Teilmengen von } A} \right| = 2^n$$

(e) Sei $x \neq y, 0 \leq k \leq n$.

$$|\{(z_1, \dots, z_n) \in \{x, y\}^n : |\{i : z_i = x\}| = k\}| = \binom{n}{k}$$

n -Tupel, bei denen x k -fach vorkommt und y $n-k$ -fach vorkommt.

0.15 Relationen und Funktionen

Definition

Seien X, Y Mengen, $R \subset X \times Y$. Dann heißt das Tripel (X, Y, R) Relation zwischen X und Y . Falls $X = Y$ spricht man von einer *binären* Relation oder einer Relation auf X . In diesem Fall benutzt man die Schreibweise

$$x \sim y :\Leftrightarrow (x, y) \in R$$

und schreibt: $(x, \sim)$ an Stelle von (X, Y, R)

0.16 Definition (Umkehrrelation)

Sei $\mathcal{R} = (X, Y, R)$ eine Relation. Die Relation $(Y, X, \bar{\mathcal{R}})$ mit $\bar{\mathcal{R}} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in \mathcal{R}\}$ heißt Umkehrrelation von $\mathcal{R}$ (bzw. $\bar{\mathcal{R}}^1$).

0.17 Abbildung, Funktion

Eine Relation $f = (X, Y, \mathcal{R})$ heißt Abbildung der Funktion, wenn gilt

$$\forall x \in X \quad \underbrace{\exists_1}_{\text{„genau ein“}} y \in Y (x, y \in \mathcal{R})$$

0.18 Bezeichnungen

- (a) Sei X eine Menge, $id_x : X \rightarrow X, x \rightarrow x$ heißt Identität auf X .
 - (b) Sei X eine Menge $A \subset X$. $L_A : A \rightarrow X, x \rightarrow x$ heißt Einbettung oder Inklusion von A in X .
 - (c) Sei $f : x \rightarrow y$ eine Funktion, $A \subset X, f|_A, A \rightarrow Y, x \rightarrow f(x)$ heißt Einschränkung oder Restriktion von f auf A .
- Bemerkung: $L_A = id_x|_A$.

0.19 Bild, Urbild

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung ($\rightarrow$ Funktion), $A \subset X, B \subset Y$.

- (a) $f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y : \exists x \in A : y = f(x)\}$ heißt „Bild von A unter f “.
- (b) $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\} = \{x \in X : \exists y \in B : y = f(x)\}$ heißt „Urbild von B unter f “.

0.20 Verkettung von Abbildungen

Seien $f : X \rightarrow Y_1$ und $g : Y_2 \rightarrow Z$ Abbildungen mit $f(x) \subset Y_2$.

Die Abbildung

$$X \rightarrow Z, x \rightarrow g(f(x))$$

heißt Verkettung von g mit f und wird mit $g \circ f$ bezeichnet.

0.21 Satz - Assoziativität der Verkettung

Seien $f : X \rightarrow Y_1, g : Y_2 \rightarrow Z_1, h : Z_2 \rightarrow W$ Abbildungen mit $f(x) \subset Y_2$ und $g(Y_2) \subset Z_2$. Dann gilt:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

0.22 Definition

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *injektiv*, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(b) f heißt *surjektiv*, wenn

$$f(X) = Y$$

(c) f heißt *bijektiv*, wenn f zugleich *injektiv* und *surjektiv* ist.

0.23 Lemma

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Dann gilt:

- (a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
- (b) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

0.24 Umkehrfunktion

Eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ heißt Umkehrfunktion oder Umkehrdarstellung zu $f : X \rightarrow Y$, wenn gilt:

$$g \circ f = id_X, \text{ d.h. } g(f(x)) = x (x \in X)$$

und

$$f \circ g = id_Y, \text{ d.h. } f(g(y)) = y (y \in Y)$$

0.25 Satz

Es gilt:

- (a) $f : X \rightarrow Y$ bijektiv $\Leftrightarrow f$ besitzt eine Umkehrabbildung

(b) $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, $B \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$

(c) $f : X \rightarrow Y$ bijektiv $\Rightarrow (f^{-1})^{-1} = f$

(d) $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, $g : Y \rightarrow Z$ bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

1 Reelle Zahlen

Körperaxiome

Auf der Menge $\mathbb{R}$ sind zwei Verknüpfungen gegeben

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y \quad (\text{bzw. } xy)$$

die folgende Regeln (Axiome) erfüllen:

(K1) Assoziativgesetze

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} (x + y) + z &= x + (y + z), \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

(K2) Kommutativgesetze

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad \begin{aligned} x + y &= y + x, \\ x \cdot y &= y \cdot x \end{aligned}$$

(K3) Existenz und Eindeutigkeit der neutralen Elemente 0 und 1, $0 \neq 1$ mit

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : \quad x + 0 &= x \\ \forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot 1 &= x \end{aligned}$$

(K4) Existenz und Eindeutigkeit der inversen Elemente

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists_1 y \in \mathbb{R} : \quad x + y &= 0 \quad (\text{Bez. } -x) \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \underbrace{\exists_1}_{\text{exist. genau 1}} y \in \mathbb{R} : \quad x \cdot y &= 1 \quad (\text{Bez. } x^{-1}) \end{aligned}$$

(K5) Distributivgesetz

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

1.1 Definition (Subtraktion und Division)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$

$$x - y := x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}, \quad (\text{falls } y \neq 0)$$

Insbesondere: $\frac{1}{y} = y^{-1}$

1.2 Rechenregeln

Im Folgenden seien $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a) \quad -(-x) = x, \quad \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (x \neq 0)$$

$$(b) \quad -(x + y) = -x - y, \quad \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

$$(c) \quad x \cdot y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$$

$$(d) \quad (-1) \cdot x = -x, \quad (-x) \cdot (-y) = x \cdot y$$

(e)

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = \frac{uy + vx}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

$$\frac{u}{x} - \frac{v}{y} = \frac{uy - vx}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

$$\frac{u}{x} \cdot \frac{v}{y} = \frac{uv}{xy} \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

$$\frac{\frac{u}{x}}{\frac{v}{y}} = \frac{uy}{vx} \quad (x \neq 0, y \neq 0, v \neq 0)$$

1.3 Summen-, Produkt- und Potenzschreibweise

$$\sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \sum_{i=1}^0 x_i := 0 \quad (\text{leere Summe})$$

$$\prod_{i=1}^n x_i := x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \prod_{i=1}^0 x_i := 1 \quad (\text{leeres Produkt})$$

$$x^n := \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_n = \prod_{i=1}^n x \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$x^0 := 1 (\text{auch } 0^0 := 1); \quad x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}, x \neq 0)$$

Verallgemeinerung

$$\sum_{i=m}^n x_i := \begin{cases} x_m + x_{m+1} + \dots + x_n & (m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n) \\ 0 & (m, n \in \mathbb{Z}, m > n) \end{cases}$$

$$\prod_{i=m}^n x_i := \begin{cases} x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_n & (m, n \in \mathbb{Z}, m \leq n) \\ 1 & (m, n \in \mathbb{Z}, m > n) \end{cases}$$

Folgerungen

$$(1) \quad \sum_{i=l}^n x_i = \left(\sum_{i=l}^m x_i \right) + \left(\sum_{i=m+1}^n x_i \right) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}, l \leq m \leq n)$$

$$(2) \quad \prod_{i=l}^n x_i = \left(\prod_{i=l}^m x_i \right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^n x_i \right) \quad (l, m, n \in \mathbb{Z}, l \leq m \leq n)$$

$$(3) \quad \begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^{m+n} & (m, n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}) \\ (x^m)^n &= x^{m \cdot n} \\ (x \cdot y)^n &= x^n \cdot y^n \end{aligned}$$

(4) Für jede bijektive Abbildung $\varphi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_{\varphi(i)}$$

(5)

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} \quad \text{Indexverschiebung}$$

$$(7) \quad \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$$

$$(8) \quad \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right)$$

$$(9) \quad \lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \cdot x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda \cdot x_i$$

$$(10) \quad \left(\sum_{i=1}^m x_i \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_i y_j \right) \stackrel{(8)}{=} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_i y_j \right)$$

Bemerkungen:

$$1. \quad \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}) = a_0 - a_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

$$2. \quad \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.4 Binomischer Satz

Sei $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

1.5 Geometrische Summenformel

(a) Sei $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= (x - y) \cdot \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k \\ &= (x - y) \cdot \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \end{aligned}$$

(b) Sei $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

1.6 Definition (Polynom vom Grad n)

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Die Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ wird als Polynom bezeichnet. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n Grad des Polynoms (Bez.: $\text{grad } p$) und a_n Höchstkoeffizient.

$\xi \in \mathbb{R}$ heisst Nullstelle von p , wenn $p(\xi) = 0$

Das Nullpolynom, definiert durch $p(x) := 0$ ($x \in \mathbb{R}$), zählt zu den Polynomen und erhält den Grad -1.

1.7 Satz

(a) Sei p ein Polynom von Grad $n \geq 1$ und ζ eine Nullstelle von p . Dann gibt es ein Polynom q mit $\text{Grad } q = n - 1$, so dass

$$p(x) = (x - \zeta) \cdot q(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(b) Jedes Polynom von Grad n lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \xi)^{m_1} \dots (x - \xi_\ell)^{m_\ell} \cdot q(x) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{\ell} (x - \xi_i)^{m_i} \right) \cdot q(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit $\ell \in \mathbb{N}_0$, $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$, $\xi_1, \dots, \xi_\ell \in \mathbb{R}$ und $q(x) \neq 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Außerdem gilt $\text{grad } p = m_1 + \dots + m_\ell + \text{grad } q$.

(c) Jedes Polynom von Grad $n \geq 0$ besitzt höchstens n verschiedene Nullstellen.

(d) Falls zwei Polynome $\sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ und $\sum_{k=0}^n b_k \cdot x^k$ an mindestens $n + 1$ Stellen übereinstimmen, dann gilt $a_k = b_k$ für alle $k = 0, \dots, n$.

Anordnungsaxiome

(A1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist genau eine der folgenden Aussagen

$$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0$$

wahr.

(A2)

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$$

(A3)

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}} : x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$$

1.8 Definition

Seien $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x > y &: \Longleftrightarrow x - y > 0 \\ x \geq y &: \Longleftrightarrow x > y \vee x = y \\ x < y &: \Longleftrightarrow y > x \\ x \leq y &: \Longleftrightarrow x < y \vee x = y \end{aligned}$$

1.9 Rechenregeln (Auszug)

Seien $x, y, z, a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a)

$$x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z \quad (\text{Transitivität})$$

(b)

$$\begin{aligned} x > y &\Leftrightarrow x + a > y + a \\ x > y \wedge a > b &\Rightarrow x + a > y + b \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x > y \wedge a > 0 &\Rightarrow a \cdot x > a \cdot y \\ x > y \wedge a < 0 &\Rightarrow a \cdot x < a \cdot y \end{aligned}$$

(d)

$$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \quad (\text{insbesondere } 1 > 0)$$

(e)

$$\underbrace{x > y \wedge y > 0}_{x > y > 0} \Rightarrow \frac{1}{y} > \frac{1}{x} > 0$$

1.10 Definition (Betrag von x)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann $|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

1.11 Folgerungen

Sei $x \in \mathbb{R}$, $M \geq 0$. Dann gilt

(a) $|x| \geq 0, \quad |-x| = |x|, \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(b)
$$\begin{aligned} |x| \leq M &\Leftrightarrow -M \leq x \leq M \\ |x| < M &\Leftrightarrow -M < x < M \\ -|x| &\leq x \leq |x| \end{aligned}$$

(c) $|xy| = |x| \cdot |y|$

(d) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (\text{falls } y \neq 0)$

1.12 Satz (Dreiecksungleichung)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$
(b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

1.13 Definition (min M, max M)

Sei M eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann heißt $m \in M$ kleinstes bzw. größtes Element von M , wenn gilt:

$$\begin{aligned} \forall a \in M &: m \leq a \\ \forall a \in M &: a \leq m \end{aligned}$$

Bezeichner: $\min M$ bzw. $\max M$.

1.14 Lemma

Sei $M \subset \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Dann existiert $\min M$.

1.15 Prinzip der vollständigen Induktion

Sei $\mathcal{A}(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage.

Sofern:

$\mathcal{A}(1)$ wahr ist (*Induktionsanfang*)

und für jedes $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ wahr ist (*Induktionsschluss*)

dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{A}(n)$ wahr

1.16 Bernoullische Ungleichungen

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$

1.17 Potenzsummen

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $S_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $S_k(n) = \sum_{i=0}^n i^k$ ein Polynom (in n) vom Grad $k+1$ und es gilt:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}((n+1)^{k+1} - 1) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Folgebegriff, reflexive Definition

Unter einer Folge von reellen Zahlen versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$.

Schreibweise: (a_n) $n \in \mathbb{N}$ oder $(a_1, a_2, a_3, \dots)$

(A4) Archimedisches Axiom

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

1.18 Folgerung

- (a) zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $z \in \mathbb{Z}$, so dass $\forall x \in \mathbb{R} \exists_1 z \in \mathbb{Z} : z \leq x < z + 1$
(b) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$ (Satz des EUDOXOS)
(c) Sei $\alpha > 0$. Dann $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \frac{\alpha}{2^n} < \varepsilon$

Bezeichnung für Intervalle:

- (a) Beschränkte Intervalle:

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$) abgeschlossenes Intervall

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) halboffenes Intervall

$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) offenes Intervall

Wir ordnen allen diesen Intervallen die Länge $|J| = b - a$ zu.

- (b) Uneingeschränkte Intervalle:

$[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$ ($a \in \mathbb{R}$) abgeschlossenes Intervall

$]-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) abgeschlossenes Intervall

$]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ ($a \in \mathbb{R}$) offenes Intervall

$]-\infty, a[:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ ($a \in \mathbb{R}$) offenes Intervall

1.19 Definition (Intervallschachtelung)

Sei $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge abgeschlossener, beschränkter Intervalle. Diese bildet eine Intervallschachtelung, wenn

- (i) $\forall n \in \mathbb{N} : J_{n+1} \subset J_n$
(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : |J_n| < \varepsilon$

Vollständigkeitsaxiom

(V) Für jede Intervallschachtelung gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n \neq \emptyset$$

d.h. $\exists x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : x \in J_n$

x ist eindeutig bestimmt, d.h. $\exists_1 x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : x \in J_n$

1.20 B-adische Entwicklung (für reelle Zahlen $\in [0, 1]$)

Sei $B \in \mathbb{N}, B \geq 2$. Wir nennen $Z \in \{0, \dots, B-1\}$ eine Ziffer zur Basis B .

(a) Sei $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Ziffern zur Basis B . Dann ist $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$J_n = \left[\sum_{k=1}^n Z_k \cdot B^{-k}, \sum_{k=1}^n Z_k \cdot B^{-k} + B^{-n} \right] \subset [0, 1]$$

eine Intervallschachtelung.

Die Folge

$$\left(\sum_{k=1}^n Z_k \cdot B^{-k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

heißt B -adische Entwicklung der eindeutig bestimmten reellen Zahl $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$.

(Hierfür schreiben wir später $x = \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \cdot B^{-k}$)

(b) Sei $0 \leq x < 1$. Dann besitzt x eine B -adische Entwicklung.

Im Fall $x \geq 1$ erhält man

$$x = \sum_{k=-k_0}^{\infty} Z_k B^{-k} \text{ für ein } k_0 \in \mathbb{N}_0$$

Das ergibt sich aus der Ungleichung

$$B^{k_0} \leq x < B^{k_0+1} \text{ und der Anwendung von 1.20 auf } \frac{x}{B^{k_0+1}}.$$

1.21 Definition (Lipschitzstetigkeit)

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lipschitzstetig, wenn

$$\exists L > 0 \forall x_1, x_2 \in I : |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

L wird als Lipschitzkonstante bezeichnet.

$$\left| \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \right| \leq L \quad (x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2)$$

Betrag der Sehnensteigungen ist durch L beschränkt. L unabhängig von x_1, x_2 !

I beschränktes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig $\Rightarrow f$ beschränkt, d.h.

$$\exists M > 0 \forall x \in I. |f(x)| \leq M$$

1.22 Zwischenwertsatz (Vorläufige Fassung)

Sei $I = [a, b]$ ein beschränktes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei lipschitzstetig, $f(a) < 0, f(b) > 0$ (oder umgekehrt $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann gibt es [mindestens] ein $x \in I$ mit $f(x) = 0$.

1.23 Corollar (Vorläufige Fassung)

Sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes beschränktes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei Lipschitzstetig und y eine reelle Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es (mindestens) ein $x \in I$ mit $f(x) = y$.

1.24 (k-te Wurzel)

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Dann gilt:

(a) Die Funktion $[0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, $x \mapsto x^k$ besitzt genau eine Umkehrfunktion.

(Bezeichnung: $x \mapsto \sqrt[k]{x}$)

(b) $(\sqrt[k]{a})^k = a = \sqrt[k]{a^k}$ ($a \geq 0$)

$\sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$ ($a, b \geq 0$)

(c) $0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[k]{a} < \sqrt[k]{b}$

1. Für k ungerade lässt sich zeigen, dass die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^k$ bijektiv ist. Man kann also in diesem Fall die k -te Wurzel auf ganz $\mathbb{R}$ definieren.
2. Die Funktion $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ($x \geq 0$), $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ fest, ist Lipschitzstetig auf $[a, \infty[$ für jedes feste $a > 0$, aber *nicht* Lipschitzstetig auf $[0, \infty[$.

2 Folgen und Grenzwerte

2.1 Definitionen (Grenzwert, Limes)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Dann heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen $a : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

Schreibweise: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$

Ist $a = 0$, so heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge.

$|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in U_\varepsilon(a)$

Mit Hilfe der offenen ε - Umgebung von $a \ (\varepsilon > 0)$

$U_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$

lässt sich auch sagen:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow$

In jeder ε - Umgebung liegen fast alle Folgenglieder an.

2.2 Folgerung

(a) Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt, d.h.

$\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$

(b) Falls $a_n \rightarrow a \neq 0 \ (n \rightarrow \infty)$, dann sind fast alle $a_n \neq 0$ und es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq n_0}$

beschränkt ist, d.h. $\exists M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{1}{|a_n|} \leq M$

(c) Falls $a_n \geq 0 \ (n \in \mathbb{N})$ und $a_n \rightarrow a$, dann gilt $a \geq 0$.

2.3 Satz

Jede Folge reeller Zahlen besitzt höchstens einen Grenzwert.

2.4 Lemma...

2.5 Rechenregeln I

Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Dann gilt:

(a) $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n - a \rightarrow 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n| \rightarrow |a|$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| \end{aligned}$$

(b) $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow a + b \wedge a_n - b_n \rightarrow a - b$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right]$$

(c) $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$ (insbesondere: $a_n \rightarrow a, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot a_n \rightarrow \lambda \cdot a$)

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right]$$

(d) $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert und ist ungleich } 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \right]$$

(e) $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \wedge a_n \geq b_n \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow a \geq b$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert} \wedge a_n \geq b_n \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right]$$

(f) $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow a \wedge a_n \leq c_n \leq b_n \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow c_n \rightarrow a$

$$\begin{aligned} &\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert} \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \right. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \wedge a_n \leq c_n \leq b_n \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \left. \right] \end{aligned}$$

(Sandwich-Lemma)

2.6 Rechenregeln II (vorläufige Fassung)

(a) Sei I ein Intervall, $a \in I, a_n \in I \ (n \in \mathbb{N})$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig. Dann gilt

$a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a)$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in I \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \right]$$

(b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, $a \geq 0, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$

$a_n \rightarrow a \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \rightarrow \sqrt[k]{a}$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ existiert} \wedge a \geq 0 \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \right]$$

2.7 Einige Grenzwerte

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{n}} = 0$

(c) Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

(d) Es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(e) Sei $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k \cdot q^n = 0$.

2.8 Definition (Häufungspunkt)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. a heißt Häufungspunkt der Folge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

Mit Hilfe der ε -Umgebung von a lässt sich äquivalent schreiben:

a Häufungspunkt in $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, genau dann, wenn in jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen unendlich viele Folgenglieder a_n .

2.9 Folgerung

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge. Dann ist a der einzige Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.10 Lemma

Sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{a\}$, $a_n \in I_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0 \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

gilt insbesondere für $I_n = [A_n, B_n]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

Aus Lemma 2.9 folgt, dass für die B -adische Entwicklung $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ von $x \in [0, 1[$ gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k B^{-k} =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k B^{-k}$$

2.11 Satz von Bolzano-Weierstraß (1. Fassung)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine *beschränkte* Folge reeller Zahlen, d.h. $\exists M > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$

Dann besitzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungspunkt.

2.12 Satz von Bolzano-Weierstraß (2. Fassung)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt einen kleinsten und einen größten Häufungspunkt.

(Bezeichnung: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$)
Limes inferior Limes superior

Für alle $\varepsilon > 0$ gilt: Fast alle (mit Ausnahme höchstens endlich vieler) Folgenglieder liegen in $\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n - \varepsilon, \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \varepsilon \right]$

2.13 Folgerung

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge mit einem einzigen Häufungspunkt a . Dann konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

2.14 Definition (monotone Folgen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Sie heißt

(a) (streng) monoton wachsend : $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \stackrel{(>)}{\geq} a_n$

(b) (streng) monoton fallend : $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} \stackrel{(<)}{\leq} a_n$

(c) (streng) monoton, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

2.15 Satz (Konvergenz beschränkter monotoner Folgen)

Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Bemerkung:

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt $\Rightarrow a_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ ($n \in \mathbb{N}$)

Analog für monoton fallende nach unten beschränkte Folgen.

2.16 Definition (Teilfolge)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen (d.h. $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$)

Dann heißt $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2.17 Folgerung

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt:

- (a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \Leftrightarrow$ Jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a
- (b) a ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow$ Es gibt eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen a konvergiert.

2.18 Satz von Bolzano-Weierstraß (3. Fassung)

Jede beschränkte Folge enthält (mindestens) eine konvergente Teilfolge.

2.19 Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

Seien $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ($n \geq 2$ fest). Dann gilt $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$, wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

2.20 Folgerung

Ein Produkt aus n positiven reellen Zahlen mit konstanter Summe ist am größten, wenn alle Faktoren gleich sind.

2.21 Definition und Satz

(a)

$$\underbrace{e}_{\text{Eulersche Zahl}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad [0! = 1]$$

(b) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ist wohldefiniert und wird als Exponentialfunktion bezeichnet.

(c) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$

Bemerkung: $e = 2.71828\dots$

$$\underbrace{\exp(x)}_{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\text{Exponentialreihe})$$

$$\underbrace{\exp(x)}_{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} + \frac{y}{n^2}\right)^n$$

2.22 Folgerung

(a) $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$, $\exp(-e) = \frac{1}{\exp(e)}$ ($x \in \mathbb{R}$), $\exp(x) > 0$ ($x \in \mathbb{R}$)

(b)

$$\begin{aligned} \exp(m) &= e^m \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ \exp\left(\frac{1}{n}\right) &= \sqrt[n]{e} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2) \\ \exp(m \cdot x) &= (\exp(x))^m \quad (m \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}) \\ \exp\left(\frac{x}{n}\right) &= \sqrt[n]{\exp(x)} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2, x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(c) $x_1 > x_2 \Rightarrow \exp(x_1) > \exp(x_2)$ ($x_1, x_2 \in \mathbb{R}$)

(d) $\exp(x)$ ist lipschitzstetig auf $]-\infty, a]$ ($a \in \mathbb{R}$ fest)

(e) $x_n \rightarrow x \Rightarrow \exp(x_n) \rightarrow \exp(x)$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ exist.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(x_n) = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right]$$

$$(f) \exp(\mathbb{R}) = \underbrace{]0, \infty[}_{\mathbb{R}_+}$$

Wegen 2.21b und 2.21c schreiben wir $\exp(x) = e^x$, insbesondere $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$ und $e^{m \cdot x} = (e^x)^m$ ($m \in \mathbb{Z}$)

2.23 Satz und Definition

(a) Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \exp(x)$ besitzt genau eine Umkehrfunktion

(Bezeichnung: $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, natürlicher Logarithmus)

(b) $e^{\ln x} = x$ ($x > 0$), $\ln e^x = x$ ($x \in \mathbb{R}$)

$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$, $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$ ($x_1, x_2 > 0$)

$\ln x^m = m \cdot \ln x$ ($m \in \mathbb{Z}$, $x > 0$)

- (c) $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \quad (x_1, x_2 > 0)$
 (d) $\ln$ ist lipschitzstetig auf $[a, \infty[\quad (a > 0 \text{ fest})$.
 (e) $x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), x > 0, x_n \rightarrow x \Rightarrow \ln x_n \rightarrow \ln x$

Es gilt für $a > 0$

$$\begin{aligned} a^m &= (e^{\ln a})^m = e^{m \ln a} \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ \sqrt[n]{a} &= \underbrace{\sqrt[n]{e^{\ln a}}} = e^{\frac{1}{n} \ln a} \\ \underbrace{\sqrt[n]{a^m}}_{a^{\frac{m}{n}} :=} &= e^{\frac{1}{n} \ln a^m} = e^{\frac{m}{n} \ln a} \end{aligned}$$

Wir definieren deshalb für $a > 0$

$$a^x := e^{x \ln a} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(Exponentialfunktion zur Basis a)

2.24 Satz

Sei $a > 0, b > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a^{x_1+x_2} &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \\ \text{(a)} \quad (a \cdot b)^x &= a^x \cdot b^x, \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad (x \in \mathbb{R}) \\ (a^{x_1})^{x_2} &= a^{x_1 \cdot x_2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(b) Sei $a > 1$. Dann $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

Sei $0 < a < 1$. Dann $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \quad (x_1, x_2 \in \mathbb{R})$

(c) $x_1 \rightarrow x \Rightarrow a^{x_n} \rightarrow a^x$

Sei ab jetzt $a > 0$ und $a \neq 1$. Dann gilt

(d) Die Funktion $\mathbb{R}_+, x \rightarrow a^x$ besitzt genau eine Umkehrfunktion (Bez. $\log_a x$ Logarithmus zur Basis a).

Es gilt $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (x \in \mathbb{R})$

(e)

$$\begin{aligned} \log_a a^x &= x \quad (x \in \mathbb{R}), a^{\log_a x} = x \quad (x > 0) \\ \log(x_1 \cdot x_2) &= \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad (x_1, x_2 > 0) \\ \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) &= \log_a x_1 - \log_a x_2 \quad (x_1, x_2 > 0) \\ \log_a(x_1^{x_2}) &= x_2 \log_a x_1 \quad (x_1 > 0, x_2 \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

(f) $x_1 > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), x > 0, x_n \rightarrow x \Rightarrow \log_a x_n \rightarrow \log_a x$

(g) Sei jetzt $a > 0, b \in \mathbb{R}$.

$a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n^{b_n} \rightarrow a^b$

$$\left[a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ exist.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \right]$$

$\log_2 =: \text{ld}$ (Logarithmus dualis)

$\log_{10} =: \text{lg}$ (Zehnerlogarithmus)

2.25 Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ bzw. $(-\infty)$, wenn

$$\begin{aligned} \forall M > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad a_n \geq M \\ \text{bzw.} \quad (a_n \leq -M) \end{aligned}$$

Schreibweise:

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow \infty \quad (\text{bzw. } a_n \rightarrow -\infty) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \infty \quad (\text{bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), a_n \rightarrow 0 &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty \\ a_n < 0 \quad (n \in \mathbb{N}), a_n \rightarrow 0 &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty \\ a_n \rightarrow \infty &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \\ a_n \rightarrow -\infty &\Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2.26 Satz (Wachstumsverhalten der Exponentialfunktion und des Logarithmus)

(a) Sei $a > 1, \beta \geq 0$. Dann gilt:

$x_n > 0 \quad (n \in \mathbb{N}), x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{a^{x_n}}{x_n^\beta} \rightarrow \infty$ (bzw. $\frac{x_n^\beta}{a^{x_n}} \rightarrow 0$)

$\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\beta} = \infty \right]$

„ a^x wächst für $x \rightarrow \infty$ schneller als jede Potenz“

(b) Sei $a > 1, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$x_n \rightarrow -\infty \Rightarrow x_n^k \cdot a^{x_n} \rightarrow 0$

$\left[\lim_{x \rightarrow \infty} x_n^k \cdot a^{x_n} = 0 \right]$

(c) Sei $a > 1$. Dann gilt:

$x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \log_a x_n \rightarrow \infty$

$\left[\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty \right]$

(d) Sei $a > 1$. Dann gilt:

$$x_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}), \ x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \log_a(x_n) \rightarrow -\infty$$

$$[\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a(x) = -\infty]$$

(e) Sei $a > 1, \beta > 0$. Dann gilt

$$x_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}), \ x_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\log_a(x_n)}{x_n^\beta} \rightarrow 0$$

$$[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_a(x)}{x^\beta} = 0]$$

„ $\log_a(x)$ wächst für $x \rightarrow \infty$ langsamer als jede Potenz“

(f) Sei $a > 1, \beta > 0$. Dann gilt

$$x_n > 0 \ (n \in \mathbb{N}), \ x_n \rightarrow 0 \Rightarrow x_n^\beta \log_a(x_n) = 0$$

$$[\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta \log_a(x) = 0]$$

2.27 Definition (Cauchyfolge)

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cauchyfolge*, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon$$

2.28 Satz (Cauchy Kriterium für Folgen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}$$

Index

Äquivalenz, 2
übliche Ergänzung, 2

Abbildung, 5
abgeschlossenes Intervall, 11
Allgemeingültige Aussage, 2
Anordnungsaxiome, 9
Archimedisches Axiom, 10
Assoziativgesetz, Mengen, 3
Assoziativgesetze, Aussagenlogik, 2
Assoziativität der Verkettung, 5
Aussagenlogik, 2

B-adische Entwicklung, 11, 14
Bernoullische Ungleichungen, 10
Beschränkte Intervalle, 11
Betrag, 9
bijektiv, 5
Bild, 5
binäre Relation, 4
Binomialkoeffizient, 4
Binomischer Satz, 8
Bolzano-Weierstraß, 14, 15

Cauchyfolge, 17
Cauchy Kriterium, 17
Complement, 3
Corollar, 12

DeMorgansche Regeln, 2
Differenz, 2
Distributivgesetz, Mengen, 3
Distributivgesetze, Aussagenlogik, 2
Doppelte Verneinung, 2
Dreiecksungleichung, 10
Durchschnitt, 2
Durchschnitt u. Vereinigung von Indexmengen, 4

Einbettung, 5
Einschränkung, 5
epsilon-Umgebung, 13

Exponentialfunktion, 15

Fakultät, 4
Folge von Ziffern zur Basis B, 11
Folgebegriff, reflexive Definition, 10
Folgeglieder, 13
Folgen und Grenzwerte, 13
Folgen und Grenzwerte, Rechenregeln I, 13
Folgen und Grenzwerte, Rechenregeln II, 13
Funktionen, 4

Geometrische Summenformel, 8
Gesetzte der Aussagenlogik, 2
Grad des Polynoms, 9
Grenzwert, 13
Grenzwerte, 13

Häufungspunkt, 14
Höchstkoeffizient, 9
halboffenes Intervall, 11

Identität, 5
Implikation, 2
Indexmengen, 3
Indexmengen, Durchschnitt, 3
Indexmengen, Vereinigung, 3
Induktionsanfang, 10
Induktionsschluss, 10
injektiv, 5
Inklusion, 5
Intervall, abgeschlossenes, 11
Intervall, halboffenes, 11
Intervall, offenes, 11
Intervallschachtelung, 11

k-te Wurzel, 12
Kartesisches Produkt in Mengen, 4
Kommutativgesetz, Mengen, 3
Kommutativgesetze, Aussagenlogik, 2
Kontrapositionsgesetz, 2
konvergent, 13

Konvergenz beschränkter monotoner Folgen, 14

L (Lipschitzkonstante), 11

Limes, 13

limes inferior, 14

limes superior, 14

Lipschitzkonstante, 11

lipschitzstetig, 11

Lipschitzstetigkeit, 11

max M, 10

Menge aller Teilmengen, 3

Mengengleichheit formal, 3

Mengenoperationen, 2, 3

min M, 10

monoton fallend, 14

monoton wachsend, 14

monotone Folgen, 14

Nullfolge, 13

Nullpolynom, 9

Nullstelle, 9

offenes Intervall, 11

Polynom vom Grad n, 9

Potenzmenge, 3

Potenzschreibweise, 7

Potenzsummen, 10

Produktschreibweise, 7

Quantoren, 2

Reelle Zahlen, 7

Reelle Zahlen, Assoziativgesetze, 7

Reelle Zahlen, Distributivgesetz, 7

Reelle Zahlen, Existenz und Eindeutigkeit der inversen Elemente, 7

Reelle Zahlen, Existenz und Eindeutigkeit der neutralen Elemente, 7

Reelle Zahlen, Kommutativgesetze, 7

reelle Zahlen, Rechenregeln, 9

Relation auf X, 4

Relationen, 4

Restriktion, 5

Satz des Eudoxos, 11

Satz von Bolzano-Weierstraß, 14, 15

Schlussweisen, allgemeingültig, 2

Sehnensteigungen, 11

Summenschreibweise, 7

surjektiv, 5

Teilfolge, 15

Teilmenge, 3

Tripel, 4

Umkehrdarstellung, 5

Umkehrfunktion, 5

Uneingeschränkte Intervalle, 11

Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel, 15

Urbild, 5

Vereinigung, 2

Verkettung von Abbildungen, 5

vollständige Induktion, 10

Vollständigkeitsaxiom, 11

Vorrangregel, 2

Ziffer zur Basis B, 11

Zwischenwertsatz, 11