

Skript vom 09.02.2010

Hinweis: Dies ist eine inoffizielle, vorläufige Mitschrift der Vorlesung „**Analysis für Informatiker und Statistiker**“ (WS 2009/10, Dozent: Dr. Walter Spann).

Aktuelle Skripte und eine bereinigte Version dieser Mitschrift gibt es in kürze in unserem MedieninfoWiki: <http://www.miwiki.de.vu>

(b) ist eigentlich eine Folgerung von (c)

[2. Gleichung mit $y = -x$]

(c) Sei $y \in \mathbb{R}$ fest. Betrachte

$$f(x) := \begin{aligned} & (\sin(x+y) - \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y)^2 \\ & + (\cos(x+y) - \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y)^2 \end{aligned}$$

z.Z.: $f = 0$.

$$f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \quad [\text{durch Nachrechnen}]$$

Nach 5.18 gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) \\ &= (\sin y - 0 \cdot \cos y - 1 \cdot \sin y)^2 + (\cos y - 1 \cdot \cos y + 0 \cdot \sin y)^2 \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Bemerkung zum Beweis von (c)

Es wäre natürlicher statt $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (bei festem $y \in \mathbb{R}$) die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) = \begin{aligned} & (\sin(x+y) - \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y)^2 \\ & + (\cos(x+y) - \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y)^2 \end{aligned}$$

zu betrachten. Für die Ableitung der Funktion

$$x \mapsto g(x, b) \quad (y = b \text{ fest})$$

an der Stelle a schreibt man

$$\partial_1 g(a, b) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial g}{\partial x}|_{(x,y)=(a,b)}$$

[Bezeichnung: *partielle* Ableitung von g nach x in (a, b)]

Entsprechend schreibt man

$$\partial_2 g(a, b) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial g}{\partial y}|_{(x,y)=(a,b)},$$

wenn man $x = a$ festhält und $y \mapsto g(a, y)$ an der Stelle $y = b$ differenziert.

5.21 Satz und Definition (π)

Die Funktion $\cos$ hat genau eine Nullstelle in $[0, 2]$ (Bezeichnung: $\frac{\pi}{2}$). Damit gilt

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad , \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Beweis: Später mit Hilfe der Taylerformel.

5.22 Folgerung

- (a) $\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \quad , \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$
- (b) $\sin(x + \pi) = -\sin(x) \quad , \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x) \quad (x \in \mathbb{R})$
- (c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad (x \in \mathbb{R})$
- (d) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$
 $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$

„Nullstellen von $\sin$ bzw. $\cos$ “

— Grafik 1 —

Beweis:

Vorbemerkung:

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) && (\text{cos-Reihe enthält nur gerade Potenzen von } x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) && (\text{sin-Reihe enthält nur } \textit{ungerade} \text{ Potenzen von } x) \end{aligned}$$

$$(c) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \stackrel{5.20c}{=} \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \cdot \cos(-x) + \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cdot \sin(-x) \stackrel{\text{Vorbem.}}{=} \cos(x)$$

$$\text{Analog: } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \sin \pi &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \stackrel{(c)}{=} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{Vorbem.}}{=} \cos \frac{\pi}{2} \stackrel{5.21}{=} 0 \\ \cos \pi &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \stackrel{(c)}{=} \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{\text{Vorbem.}}{=} -\sin \frac{\pi}{2} \stackrel{5.21}{=} -1 \end{aligned}$$

$$\sin(x + \pi) \stackrel{5.20c}{=} \sin x \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1 \text{ (s.o.)}} + \cos x \cdot \underbrace{\sin \pi}_{0 \text{ (s.o.)}} = -\sin x$$

$$\text{Analog: } \cos(x + \pi) = -\cos x.$$

$$(a) \quad \sin(x + 2\pi) = \sin((x + \pi) + \pi) \stackrel{(b)}{=} -\sin(x + \pi) \stackrel{(b)}{=} -(-\sin(x)) = \sin(x)$$

$$\text{Analog: } \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

(d) Nach dem Mittelwertsatz gilt für $x > 0$

$$\begin{aligned} \sin x - \sin 0 &= \cos \xi \cdot (x - 0) & (\xi \in]0, x[\text{ geeignet}) \\ \text{Also} &= \underbrace{\cos \xi}_{>0} \cdot x > 0 & (0 < x \leq \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

[Bemerkung: $\cos \xi < 0$ für $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$, weil $\frac{\pi}{2}$ die einzige Nullstelle von $\cos$ in $[0, 2]$, $\cos = 1$ und $\cos$ stetig.]

$$\text{Somit} \quad \cos(x) \stackrel{(c)}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \stackrel{\text{Vorbem.}}{=} -\sin\left(\underbrace{x - \frac{\pi}{2}}_{\in]0, \frac{\pi}{2}]}\right) \stackrel{\text{s.o.}}{<} 0 \quad \left(\frac{\pi}{2} < x \leq \pi\right)$$

Daher hat $\cos$ in $[0, \pi]$ nur die Nullstelle $\frac{\pi}{2}$. Aus (b) folgt dann die Nullstellenaussage für $\cos$ und wegen

$$\sin(x) \stackrel{(c)}{=} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \stackrel{\text{Vorbem.}}{=} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

entsprechend die Nullstellenaussage für $\sin$.

5.23 Satz von Taylor mit Lagrange-Restglied

Randbemerkung:

Taylorreihe (im Entwicklungspunkt 0):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

falls f Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

Bisher noch *nicht* behandelt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar und f in $]a, b[$ $(n+1)$ -mal differenzierbar, $x, x_0 \in [a, b]$, $x \neq x_0$.

Dann existiert ξ zwischen x_0 und x , so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n}_{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \text{ } n\text{-tes Taylerpolynom}} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{\text{Lagrange-Restglied}}$$

Bemerkung: Für $n = 0$ ergibt sich die Taylorformel aus dem MWS:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(\xi) \\ \Rightarrow f(x) &= f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

Beweis:

Es reicht, die Behauptung für $x_0 = a$ und $x = b$ zu beweisen, d.h. zu zeigen ist, dass für geeignetes $\xi \in]a, b[$ gilt:

$$f(b) = f(a) + f'(a) \cdot (b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1} \quad (\star)$$

Für $p(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ gilt:

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad (0 \leq k \leq n) \quad (\star\star)$$

Setze

$$h(x) := f(x) - \left(p(x) + \mu \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right) \quad (x \in [a, b]) \quad (\star\star\star),$$

worin $\mu \in \mathbb{R}$ so gewählt ist, dass $h(b) = 0$. (Das ist möglich, weil man die Gleichung $h(b) = 0$ nach μ auflösen kann.)

Wir zeigen: $\mu = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ für ein geeignet gewähltes $\xi \in]a, b[$. Aus $(\star\star)$ ergibt sich

$$h^{(k)}(a) = 0 \quad (0 \leq k \leq n) \quad (\star\star\star)$$

Wegen $h(b) = 0$ existiert nach dem Satz von Rolle ein $\xi_1 \in]a, b[$ mit $h'(\xi_1) = 0$.

Wegen $h'(a) = 0$ und $h'(\xi_1) = 0$ existiert ein $\xi_2 \in]a, \xi_1[$ mit $h''(\xi_2) = 0$ usw.

Man erhält so aus $(\star\star\star)$ ein $\xi_{n+1} \in]a, \xi_n[\subset]a, b[$ mit

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(\xi_{n+1}) &= 0 \\ \text{d.h.} \quad f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) - \mu \frac{(n+1)!}{(n+1)!} &= 0 \end{aligned}$$

[Veranschaulichung von h im Fall $n = 0$

$$h(x) = f(x) - f(a) + \mu \cdot (x-a)$$

— Grafik 2 —

Die Wahl von μ so, dass $h(b) = 0$ macht die gewählte Gerade zur Sekante durch $(a, f(a))$ $(b, f(b))$]

Beispiel: Binomialreihe

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^\alpha \quad (x > -1, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0) \\
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot \underbrace{(\alpha-k+1)}_{\alpha-(k-1)} \cdot (1+x)^{\alpha-k}
\end{aligned}$$

$$5.23 \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}}_{\text{Verallg. Bin.koeff.}} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+x)^{\alpha-(n+1)}$$

Verallg. Bin.koeff. $\binom{\alpha}{k} := \xi$ zwischen 0 und x

$$\left| \binom{\alpha}{n} \right| = \left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n \cdot 1 \cdot \dots \cdot n-1} \right| = \underbrace{\frac{|\alpha|}{n}}_{\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)} |1-\alpha| \left| 1 - \frac{\alpha}{2} \right| \dots \left| 1 - \frac{\alpha}{n-1} \right|$$

Die Produkte $|1-\alpha| \cdot \dots \cdot \left| 1 - \frac{\alpha}{n-1} \right|$ bleiben beschränkt, weil für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \alpha$, d.h. $\frac{\alpha}{k} \leq 1$ $|1 - \frac{\alpha}{k}| = 1 - \frac{\alpha}{k} \leq 1$ gilt und daher nur eine feste Zahl von Faktoren (unabhängig von n) größer als 1 sind.

$$\left| \binom{\alpha}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{(1+x)^{n+1-\alpha}} \right| \leq \underbrace{\left| \binom{\alpha}{n+1} \right|}_{\rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)} \quad \begin{matrix} (0 < x < 1) \\ \Rightarrow \xi \in]0, 1[\end{matrix}$$

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (0 < x < 1; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0)$$

$$\text{Ohne Beweis} \quad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (0-1 < x < 1; \alpha \geq 0)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (0-1 < x < 1; \alpha < 0)$$