

Skript vom 12.01.2010

Hinweis: Dies ist eine inoffizielle, vorläufige Mitschrift der Vorlesung „Analysis für Informatiker und Statistiker“ (WS 2009/10, Dozent: Walter Spann).

Aktuelle Skripte und eine bereinigte Version dieser Mitschrift gibt es in kürze in unserem MedieninfoWiki: <http://www.miwiki.de.vu>

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad \text{Potenzreihe} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (|x| < \mathbb{R})$$

Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m} \text{ ist konvergent für } m \in \mathbb{N}, m \geq 2 :$$

Beweis

$$0 \leq \frac{1}{k^m} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} \quad (k \geq 2)$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ (Beispiel zu 3.1) folgt die Konvergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, also auch die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \left(= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)$.

[genauer:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \rightarrow 1 - \frac{1}{n} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \end{aligned}$$

usw.]

Wir betrachten im Folgenden zwei Konvergenzkriterien, die als Majorante die geometrische Reihe verwenden.

Geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert für $|q| < 1$

Quotient aufeinanderfolgender Glieder: $\left| \frac{q^{k+1}}{q^k} \right| = |q| < 1$

3.8 Quotientenkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

- (a) $\left(\exists q \in]0, 1[: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \text{ für fast alle } k \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$
- (b) $\left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \text{ für fast alle } k \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$

„Fast alle“ bedeutet hier mehr „alle mit Ausnahme höchstens unendlich vieler“.

Beweis:

(a) O.E.d.A.:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

weil das Abändern endlich vieler Glieder zwar evtl. den Wert der Reihe, aber nicht ihr Konvergenzverhalten ändert.

Somit

$$\begin{aligned} |a_{k+1}| &\leq q \cdot |a_k| \leq q^2 \cdot |a_{k-1}| \leq \dots \leq q^k \cdot |a_1| \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \text{bzw. } |a_k| &\leq q^{k-1} \cdot |a_1| \quad (k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent nach dem Majorantenkriterium, weil für $0 < q < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} |a_1| \quad \left(= \sum_{k=0}^{\infty} q^k |a_1| \right)$$

konvergiert.

(b) O.E.d.A.:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad [\text{und } a_k \neq 0 \quad (k \in \mathbb{N})]$$

Somit $|a_{k+1}| \geq |a_k| \geq \dots \geq |a_1| > 0$. Somit ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *keine* Nullfolge und daher nach 3.4 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3.9 Satz (Exponentialreihe)

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist für $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent und es gilt:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Beweis: Klar für $x = 0$. Sei $x \neq 0$ fest.

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \frac{|x|}{k+1} \leq \underbrace{\frac{|x|}{|x|+1}}_{=:q < 1} \quad (k \geq |x|)$$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent.

Entsprechend der Bemerkung zu 2.21 (ÜA 40) gilt

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| \\ & \leq \frac{x^2}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|x|^k}{k!} \\ & \leq \frac{1}{2n} x^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} \rightarrow 0 \quad (x \text{ fest!}) \end{aligned}$$

[Das Quotientenkriterium hat den Nachteil, dass fast alle $a_k \neq 0$ sein müssen. Es ist ausserdem weniger leistungsfähig als das folgende Wurzelkriterium, dass diesen Nachteil nicht aufweist.]

3.10 Wurzelkriterium

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann gilt

- (a) $\left(\exists q \in]0, 1[: \sqrt[k]{|a_k|} \leq q \text{ für fast alle } k \right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ absolut konvergent}$
- (b) $\underbrace{\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1}_{\text{d.h. } |a_k| \geq 1} \text{ für unendlich viele } k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent}$

Beweis:

(a) O.E.d.A.: $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad (k \in \mathbb{N})$

Also $|a_k| \leq q^k \quad (k \in \mathbb{N})$ und daher wegen $|q| < 1$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent nach dem Majorantenkriterium.

(b) $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k , d.h. $|a_k| \leq 1$ für unendlich viele k .

Somit ist $(|a_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ und daher $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *keine* Nullfolge. Also ist nach 3.4 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3.11 Folgerung

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Dann gilt:

(a) $a_k \neq 0$ für fast alle k , $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

$a_k \neq 0$ für fast alle k , $\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

(b) $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent

$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent

Dabei benutzen wir folgende

3.12 Definition

Sei $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ nach oben unbeschränkt}$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} c_k = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad c_k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

[

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} c_k = -\infty \quad :\Leftrightarrow \quad c_k \rightarrow -\infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} c_k = -\infty \quad :\Leftrightarrow \quad (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ nach unten beschränkt}$$

]

Beweis von Satz 3.11

- (a) Behauptung: $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Leftrightarrow \exists q \in]0, 1[: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ für fast alle k

Setze $c_k := \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ ($k \geq k_0$), $c_\star := \liminf_{k \rightarrow \infty} c_k$, $c^\star := \limsup_{k \rightarrow \infty} c_k$

„ $\Leftarrow$ “: $|c_k| \leq q$ ($k \geq k_0$). Hieraus folgt durch Betrachtung einer gegen $c^\star$ konvergierenden TF¹ von $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dass $|c^\star| \leq q$, d.h. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1$.

„ $\Rightarrow$ “ Nach Satz 2.12 gilt für jedes $\varepsilon > 0$ und für fast alle k

$$c_k \in]c_\star - \varepsilon, c^\star + \varepsilon[$$

Mit $\varepsilon := \frac{1-c^\star}{2} > 0$ (wg. $c^\star < 1$) folgt $c_k \in]c_\star - \varepsilon, \frac{1+c^\star}{2}[$, also insbesondere $c_k \leq \frac{1+c^\star}{2} =: q < 1$ für fast alle k , d.h. $\exists q \in]0, 1[: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ für fast alle k .

Die Konvergenzaussage folgt aus der Behauptung und dem Quotientenkriterium 3.8a.

Behauptung

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Rightarrow \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1 \text{ für fast alle } k$$

Wir zeigen die Kontraposition:

Falls $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$ für unendlich viele k , dann besitzt $\left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)_{k \in \mathbb{N}}$ einen H.P. in $[0, 1]$, d.h.

$$\underbrace{\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}_{\text{kleinster H.P.}} \in [0, 1]$$

Die Divergenzaussage folgt aus der Behauptung und dem Quotientenkriterium 3.8b.

- (b) Die Konvergenzaussage wird analog zur Konvergenzaussage von (a) bewiesen.

Behauptung: $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k

Setze jetzt $c_k := \sqrt[k]{|a_k|}$ und $c^\star := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$

1. Fall: $c^\star = \infty$. Dann $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt, also $c_k \geq 1$ für unendlich viele k .
2. Fall: $1 < c^\star < \infty$: Da $c^\star$ H.P. von $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ liegen für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele c_k in $]c^\star - \varepsilon, c^\star + \varepsilon[$.

Wählt man $\varepsilon > 0$ genügend klein, so folgt wegen $c^\star > 1$, dass unendlich viele $c_k > 1$ sind.

¹ Teilfolge