

Skript vom 19.01.2010

Hinweis: Dies ist eine inoffizielle, vorläufige Mitschrift der Vorlesung „Analysis für Informatiker und Statistiker“ (WS 2009/10, Dozent: Walter Spann).

Aktuelle Skripte und eine bereinigte Version dieser Mitschrift gibt es in kürze in unserem MedieninfoWiki: <http://www.miwiki.de.vu>

Bemerkung

Für *nicht* absolut konvergente Reihen gilt der Umordnungssatz im allgemeinen nicht. Nach Riemann gilt sogar folgende Aussage:

Jede konvergente, aber *nicht* absolut konvergente Reihe kann so umgeordnet werden, dass sie gegen eine beliebige vorgegebene reelle Zahl konvergiert.

3.16 Satz (Cauchy-Produkt)

Seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

absolut konvergente Reihen.

Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$c_k := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0$$

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut konvergent und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}}_{c_k}$$

[Merkregel: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i \geq 0, j \geq 0, i+j=k} a_i b_j$]

Skizze:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots & a_0 b_k & \cdots \\
 a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & & \\
 a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & & \\
 \vdots & & & & & \\
 a_k b_0 & & & & & \\
 \vdots & & & & &
 \end{array}$$

Beweis: Bilde im obigen Schema die Hilfsfolge $(d_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$

$$\left| \begin{array}{ccc}
 d_0 & d_3 & d_8 \\
 d_1 & d_2 & d_7 \\
 d_4 & d_5 & d_6 \\
 \vdots & & \\
 d_{n^2} & d_{n^2+1} & \cdots
 \end{array} \right| \quad d_{(n+1)^2-1}$$

$$\begin{aligned}
 d_0 &= a_0 b_0 \\
 d_1 &= a_1 b_0 \\
 d_2 &= a_1 b_1 \\
 d_3 &= a_0 b_1 \\
 d_4 &= a_2 b_0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{l=0}^{(n+1)^2-1} |d_l| = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_i b_j| = \underbrace{\sum_{i=0}^n |a_i|}_{\rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} a_i} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^n |b_j|}_{\rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} b_j} \quad (n \rightarrow \infty)$$

ist die Reihe $\sum_{l=0}^n d_l$ absolut konvergent.

Entsprechend:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=0}^n d_l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{(n+1)^2-1} d_l \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i \cdot \sum_{j=0}^n b_j \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n b_j \\
 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j
 \end{aligned}$$

$(d_l)_{l \in \mathbb{N}_0}$ kann folgendermaßen umgerechnet werden:

$$d_{\sigma(0)} \quad d_{\sigma(2)} \quad d_{\sigma(5)} \quad \cdots \quad d_{\sigma\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right)}$$

$$d_{\sigma(1)} \quad d_{\sigma(4)}$$

$$d_{\sigma(3)}$$

$$\vdots$$

$$d_{\sigma\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

d.h. $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 2, \sigma(5) = 8, \dots$

Also nach dem Umordnungssatz

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} d_l &= \sum_{l=0}^{\infty} d_{\sigma(l)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1} d_{\sigma(l)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \end{aligned}$$

Bemerkung Auch beim Cauchy-Produkt ist die Voraussetzung absolute Konvergenz im allgemeinen *nicht* verzichtbar.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}_{\text{konv. nach Leibnitzkrit.}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} < \infty$$

$$\begin{aligned}
|c_k| &= \left| \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \cdot \frac{(-1)^{k-i}}{\sqrt{k-i+1}} \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^k \frac{(-1)^k}{\sqrt{i+1}\sqrt{k-i+1}} \right| \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{1}{\sqrt{(i+1)(k-i+1)}} \\
&\geq \sum_{i=0}^k \frac{1}{\frac{i+1+k-i+1}{2}} \\
&= \sum_{i=0}^k \frac{2}{k+2} \\
&= 2 \cdot \underbrace{\frac{k+1}{k+2}}_{\rightarrow 1 \text{ (} k \rightarrow \infty)} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Daher divergiert $\sum_{i=0}^k c_k$.

Potenzreihen

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge reeller Zahlen. Unter einer Potenzreihe verstehen wir die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}
a_k &= 1 && \text{geometrische Reihe} \\
a_k &= \frac{1}{k!} && \text{Exponentialreihe} \\
a_k &= \begin{cases} \frac{1}{k!} & k = 2l \quad (l \in \mathbb{N}_0) \\ 0 & k = 2l + 1 \quad (l \in \mathbb{N}_0) \end{cases} && \text{Cosinus hyperbolicus}
\end{aligned}$$

[Die erste Reihe konvergiert nur für $|x| < 1$, wogegen die beiden folgenden Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren.]

3.17 Satz (Konvergenzradius von Potenzreihen)

Sei

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

eine Potenzreihe. Dann gibt es genau ein $R \in [0, \infty]$ (Bezeichnung: Konvergenzradius), so dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $|x| < R$ absolut konvergiert *und* für $|x| > R$ divergiert. Es gilt:

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

wenn man *hier* $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ setzt.

Falls die Folge

$$\left(\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

konvergiert oder bestimmt (gegen ∞) divergiert, gilt außerdem

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$$

(ebenfalls mit $\frac{1}{0} := \infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$)

Beweis

1.F.: $0 < \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < \infty$:

Nach der Folgerung 3.11b (Wurzelkriterium) gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ konvergiert, falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} < 1, \quad \text{d.h.} \quad |x| \cdot \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$$

$$\text{oder } |x| < \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ divergiert, falls } \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} > 1, \quad \text{d.h.} \quad |x| > \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

2.F.: $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$. Daher $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$

Nach Folgerung 3.11b (Wurzelkriterium) folgt Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. für alle x mit $|x| < \infty \stackrel{\text{s.O.}}{:=} \frac{1}{0} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$.

3.F.: $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$. Also ebenfalls $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \infty \quad (x \neq 0)$.

Somit Divergenz nach 3.11b von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \neq 0$, d.h. $|x| > 0 = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$.

Im Falle der Anwendbarkeit des Quotientenkriteriums (Folgerung 3.11a), d.h. falls

$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert in $[0, \infty]$ folgt, dass

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergent für $|x| < \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$.

Wegen der Eindeutigkeit des Konvergenzradius' folgt

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$$

Beispiel:

(a) $a_k = 1 \quad (k \in \mathbb{N}_0) : \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1 \Rightarrow R = 1$

(b) $a_k = \frac{1}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0) : \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = 0 \Rightarrow R = \infty$

(c) $a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!} & k \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| < \infty$

Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $R = \infty$.

3.18 Hilfssatz

(a) Sei I ein Intervall, $L < \infty$, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Falls $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in I)$, dann ist f lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L .

(b) Sei I ein Intervall, $g_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante L_k . Falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$$

für jedes $x \in I$ und $\sum_{k=1}^{\infty} L_k < \infty$ vorliegt, dann ist die Funktion $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \quad (x \in I)$

lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $\sum_{k=1}^{\infty} L_k$.

Beweis

$$(a) \underbrace{|f_n(x) - f_n(\bar{x})|}_{\rightarrow f(x)} \leq L|x - \bar{x}| \quad (x, \bar{x} \in I, n \in \mathbb{N})$$

$$\text{d.h. } |f(x) - f(\bar{x})| \leq L|x - \bar{x}|$$

$$(b) \text{ Betrachte } f_n(x) := \sum_{k=1}^n g_k(x) \quad (x \in I)$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ für jedes $x \in I$ konvergent, d.h.

$$\sum_{k=1}^n g_k(x) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) =: f(x).$$

$$|f_n(x) - f_n(\bar{x})| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} (g_k(x) - g_k(\bar{x})) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x) - g_k(\bar{x})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} L_k |x - \bar{x}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} L_k \right) (x - \bar{x})$$

Also sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt und die Behauptung folgt.

Bemerkung: Aus $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig und $f_n(x) \rightarrow f(x) \quad (x \in \mathbb{R})$ folgt im Allgemeinen *nicht*, dass $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig ist.

Beispiel: $f_n(x) = x^n \quad (x \in [0, 1])$ f_n ist lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $n - 1$

$$f_n(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} =: f(x) \quad (x \in [0, 1])$$