

Skript vom 26.01.2010

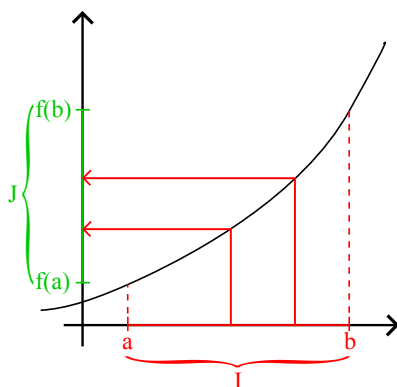
Hinweis: Dies ist eine inoffizielle, vorläufige Mitschrift der Vorlesung „Analysis für Informatiker und Statistiker“ (WS 2009/10, Dozent: Walter Spann).

Aktuelle Skripte und eine bereinigte Version dieser Mitschrift gibt es in kürze in unserem MedieninfoWiki: <http://www.miwiki.de.vu>

4.7 Satz (Umkehrung streng monotoner, stetiger Funktionen)

Sei $I := [a, b]$ ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall,
 $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend (bzw. fallend) und stetig.

Dann bildet f das Intervall I auf $J := [f(a), f(b)]$ (bzw. $J := [f(b), f(a)]$) bijektiv ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ ist ebenfalls streng monoton wachsend (bzw. fallend) und stetig.



Bemerkung:

1. Für eine *injektive*, reellwertige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert wegen der fehlenden Surjektivität im Allgemeinen keine Umkehrfunktion im Sinne von 0.24. Man kann sich folgendermaßen behelfen:

$\tilde{f} : I \rightarrow f(I)$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ ist bijektiv und besitzt die Umkehrfunktion $\tilde{f}^{-1} : f(I) \rightarrow I$. Mit der Einbettung $\iota_I : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\iota_I(x) = x$ entsteht aus $\tilde{f}$.

$\tilde{f}^{-1} : f(I) \rightarrow I$. Mit der Einbettung $\iota_I : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\iota_I(x) = x$ entsteht aus $\tilde{f}$ die injektive, reellwertige Funktion $\iota \circ \tilde{f} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$, die wir hier als f^{-1} bezeichnen

und Umkehrfunktion von f nennen. Diese für reellwertige Funktionen gebräuchliche Bezeichnung lässt sich rechtfertigen, weil

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in I), \quad f\left(f^{-1}(y)\right) = y \quad (y \in f(I))$$

2. Auch unter der zusätzlichen Voraussetzung $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig folgt im Allgemeinen *nicht* die Lipschitzstetigkeit der Umkehrfunktion.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll} f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], & x \mapsto x^2 \quad \text{lipschitzstetig, streng monoton} \\ f^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1], & x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{stetig, aber nicht lipschitzstetig} \end{array}$$

Beweis:

1. f ist injektiv, weil streng monoton wachsend
2. $f(I) = J$, d.h. $f[a, b] = [f(a), f(b)]$

$$\left[\text{Denn} \left. \begin{array}{ll} \underbrace{a \leq x \leq b}_{x \in I} \xrightarrow{f \text{ mon. wachsend.}} \underbrace{f(a) \leq f(x) \leq f(b)}_{f(x) \in J}, & \text{d.h. } f(I) \subset J \\ \underbrace{f(a) \leq y \leq f(b)}_{y \in J} \xrightarrow{4.6} \underbrace{\exists x \in [a, b] : f(x) = y}_{\text{d.h. } y \in f(I)}, & \text{d.h. } J \subset f(I) \end{array} \right\} f(I) = J \right]$$

3. Also ist $\tilde{f} : I \rightarrow J$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ streng monoton, bijektiv und besitzt die Umkehrfunktion $\tilde{f}^{-1} : J \rightarrow I$.
4. Zeige: $\tilde{f}^{-1} : J \rightarrow I$ ist streng monoton wachsend. Seien $y_1, y_2 \in J$ mit $y_1 < y_2$.
Z.z. $\tilde{f}^{-1}(y_1) < \tilde{f}^{-1}(y_2)$.

Annahme: $\tilde{f}^{-1}(y_1) \geq \tilde{f}^{-1}(y_2)$.

Wegen $\tilde{f}$ monoton wachsend folgt $\tilde{f}\tilde{f}^{-1}(y_1) \geq \tilde{f}\tilde{f}^{-1}(y_2)$, d.h. $y_1 \geq y_2$ $\nmid$

5. **Zeige:**

$\tilde{f}^{-1} : J \rightarrow I$ ist stetig.

Annahme: $\tilde{f}^{-1}$ ist nicht stetig, d.h.

$$\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} : y_n \in J \quad (n \in \mathbb{N}) : \exists y \in J : y_n \rightarrow y, \quad \tilde{f}^{-1}(y_n) \not\rightarrow \tilde{f}^{-1}(y)$$

Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass unendliche viele $\tilde{f}^{-1}(y_n)$ *nicht* in $U_\varepsilon(\tilde{f}^{-1}(y))$ liegen. Daher gibt es eine Teilfolge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\left| \tilde{f}^{-1}(y_{n_k}) - \tilde{f}^{-1}(y) \right| \geq \varepsilon \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (\star)$$

Wegen $\tilde{f}^{-1}(y_{n_k}) \in I$ und I beschränkt, ist $(\tilde{f}^{-1}(y_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, also gibt es eine konvergente Teilfolge $(\tilde{f}^{-1}(y_{n_{k_j}}))_{j \in \mathbb{N}}$, die gegen $x \in I$ konvergiert, d.h.

$$\tilde{f}^{-1}(y_{n_{k_j}}) \rightarrow x \quad (j \rightarrow \infty) \quad (\star\star)$$

Da $\tilde{f}$ stetig ist, ergibt sich

$$\underbrace{\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(y_{n_{k_j}}))}_{y_{n_{k_j}}} \rightarrow \tilde{f}(x) \quad (j \rightarrow \infty) \quad (\star\star\star)$$

Wegen $y_n \rightarrow y$ folgt aus $(\star\star\star)$ $y = \tilde{f}(x)$.

Andererseits aus $(\star)$ und $(\star\star)$ $\left| x - \tilde{f}^{-1}(y) \right| \geq \varepsilon > 0$.

Widerspruch!

6. $f^{-1} := \iota \circ \tilde{f}$ ist als Verknüpfung streng monoton wachsender und stetiger Funktionen ebenfalls streng monoton wachsend und stetig.

Motivation für Supremum und Infimum einer beschränkten Menge:

$M := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ besitzt kein Maximum ($1 \notin M!$), allerdings hat 1 hier eine besondere Bedeutung:

Sie ist nicht hier obere Schranke von M , d.h.

$$\forall x \in M : x \leq 1,$$

sondern sogar die *kleinste* obere Schranke.

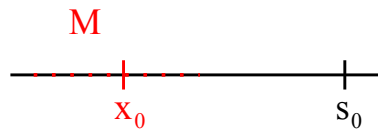
4.8 Satz und Definition (Supremum, Infimum)

Jede nicht leere, nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Teilmenge M von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke.

Bezeichnung: $\sup M$ bzw. $\inf M$

Beweis:

Sei s_0 eine obere Schranke von M , d.h. $x \leq s_0$ ($x \in M$). Außerdem sei $x_0 \in M$. Wir bilden ausgehend von $I_0 = [x_0, s_0]$ eine Intervallschachtelung $I_n = [x_n, s_n]$ mit $x_n \in M$ und s_n obere Schranke von M .



$$I_{n+1} := \begin{cases} \left[x_n, \frac{x_n + s_n}{2} \right] & \text{, falls } \frac{x_n + s_n}{2} \text{ obere Schranke von } M \\ \left[x_{n+1}, s_n \right] & \text{mit } x_{n+1} \in M \text{ und } x_{n+1} > \frac{x_n + s_n}{2} \text{ keine obere Schranke von } M \end{cases}$$

Somit $|I_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |I_n|$, daher $|I_n| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Somit existiert $s \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und nach Lemma 2.10 gilt $x_n \rightarrow s$ und $s_n \rightarrow s$ ($n \rightarrow \infty$).

Nach Konstruktion gilt [wegen s_n obere Schranke von M]

$$x \leq s_n \quad (x \in M, n \in \mathbb{N}).$$

Hieraus wegen $s_n \rightarrow s$

$$x \leq s \quad (x \in M)$$

d.h. s ist obere Schranke von M .

Annahme

s ist *nicht* kleinste obere Schranke von M . Dann ist $s - \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ eine kleinere obere Schranke von M , d.h. insbesondere wegen $x_n \in M$

$$x_n \leq s - \varepsilon \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wegen $x_n \rightarrow s$ folgt hieraus

$$s \leq s - \varepsilon$$

Widerspruch!

Bemerkung:

1. $s = \sup M \Leftrightarrow s$ obere Schranke und

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in M \quad (n \in \mathbb{N}) \wedge x_n \rightarrow s \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Beweis:} & \text{ " } \Rightarrow \text{ " } \quad \text{Wähle } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ wie im Beweis zu 4.8} \\ & \text{ " } \Leftarrow \text{ " } \quad \text{Argumentiere so, wie im Beweis zu 4.8 ab Annahme} \end{array} \right]$$

2. Für beschränkte Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt (ohne Beweis)

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k : k \geq n\} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_k : k \geq n\} \end{aligned}$$

4.9 Satz

Sei I ein abgeschlossenes beschränktes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann ist f beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h.

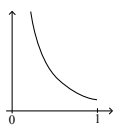
es gibt $\bar{x} \in I$ mit $f(\bar{x}) = \sup \{f(x) : x \in I\}$

und $\underline{x} \in I$ mit $f(\underline{x}) = \inf \{f(x) : x \in I\}$

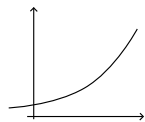
[oder anders ausgedrückt: $\max \{f(x) : x \in I\}$ und $\min \{f(x) : x \in I\}$ existieren.]

Bemerkung:

Ohne die Voraussetzung $[a, b]$ abgeschlossen und beschränkt ist die Aussage im Allgemeinen nicht richtig.



$f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$ besitzt keine Maximumstelle



$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ besitzt weder Maximum- noch Minimumstelle

Beweis

Zeige nur die Existenz der Maximumstelle.

1. f ist nach oben beschränkt (d.h. $\{f(x) : x \in I\}$ ist nach oben beschränkt)

Falls nicht, existiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in I$ und $f(x_n) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$.

Nach BOLZANO-WEIERSTRAß existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und somit $x \in \mathbb{R}$ mit $x_{n_k} \rightarrow x$. Wegen I abgeschlossen, gilt $x \in I$. Aus f stetig, ergibt sich $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x)$ im Widerspruch zu $f(x_n) \rightarrow \infty$.

2. Nach 4.8 und 1. existiert $\sup \{f(x) : x \in I\}$

Entsprechend der Bemerkung zu 4.8 gibt es eine Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f(x_n) \rightarrow \sup \{f(x) : x \in I\}$.

Wähle konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und setze $\bar{x} := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Dann $\bar{x} \in I$ (wegen I abgeschlossen) und

$$f(\bar{x}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}\right) \stackrel{f \text{ stetig}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \underbrace{\sup \{f(x) : x \in I\}}_{\bar{m}}$$

[d.h. $\exists \bar{m} \in \mathbb{R} : f(x) \leq \bar{m} \quad (x \in I)$ und $f(\bar{x}) = \bar{m}$

Zusammengefasst: $\exists \bar{x} \in I : f(x) \leq f(\bar{x}) \quad (x \in I)$]