

Skript vom 02.02.2010

Hinweis: Dies ist eine inoffizielle, vorläufige Mitschrift der Vorlesung „**Analysis für Informatiker und Statistiker**“ (WS 2009/10, Dozent: Dr. Walter Spann).

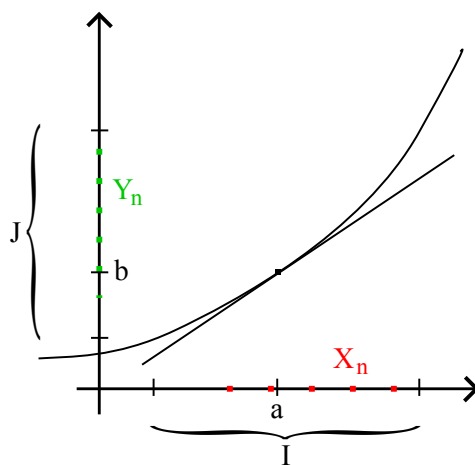
Aktuelle Skripte und eine bereinigte Version dieser Mitschrift gibt es in kürze in unserem MedieninfoWiki: <http://www.miwiki.de.vu>

5.7 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei I ein abgeschlossenes beschränktes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig, $J := f(I)$.

Ist f in $a \in I$ differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \rightarrow \mathbb{R}$ in $b := f(a)$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$



Beweis

Die Umkehrfunktion existiert nach Satz 4.7 und ist streng monoton und stetig. So sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n \in J$ ($n \in \mathbb{N}$) mit $y_n \rightarrow b$, $y_n \neq b$.

$$x_n := f^{-1}(y_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$x_n \neq a$ wegen $y_n \neq b$ und f bijektiv.

$x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$ wegen $y_n \rightarrow b$ $\left[\text{denn } y_n \rightarrow b \xrightarrow{f^{-1} \text{ stetig}} \underbrace{f^{-1}(y_n)}_{x_n} \rightarrow \underbrace{f^{-1}(b)}_a \right]$

$$\text{Somit } \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{1}{\frac{y_n - b}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \xrightarrow{f \text{ diffb. in } a} \frac{1}{\underbrace{f'(a)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Beispiel:

(a) $f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f^{-1}(x) = \ln x \quad (x > 0)$

[Wähle $x > 0$ fest und setze $I := [\frac{x}{2}, 2x]$]

$$\ln'(x) = \frac{1}{f(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

(b) Folgerung aus (a):

$$\begin{aligned} f(x) &= x^\alpha \quad (x > 0) \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ fest} \\ \Rightarrow f(x) &= e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0), \\ \text{also } f'(x) &= h'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= e^{g(x)} g'(x) \\ &= \overbrace{e^{\alpha \ln x}}^{x^\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} \\ &= h(g(x)) \text{ mit } h(x) = e^x, \quad g(x) = \alpha \ln x \\ &= \alpha \cdot x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

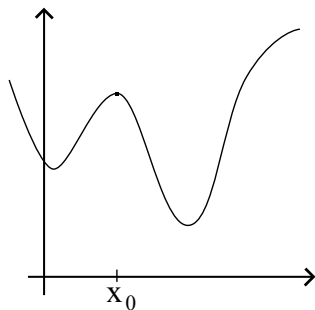
5.8 Definition (lokale Extrema)

Sei I ein offenes Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in I$.

f hat in x_0 ein lokales Maximum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0): f(x) \leq f(x_0)$

f hat in x_0 ein lokales Minimum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0): f(x) \geq f(x_0)$

f hat in x_0 ein lokales Extremum $\Leftrightarrow f$ hat in x_0 ein lokales Maximum oder lokales Minimum



5.9 Satz (Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum)

Sei I ein *offenes* Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, f besitze in $x_0 \in I$ ein lokales Extremum. Dann gilt:

$$f'(x_0) = 0$$

Beweis

O.E.d.A. x_0 lokales Minimum

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geq 0 \quad (x \in U_\delta(x_0)) \\ \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\geq 0 \quad (x_0 < x < x_0 + \delta) \\ \Rightarrow f'(x_0) &= \underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f \text{ diff.b. in } x_0} \\ &= \underbrace{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Analog folgt aus $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (x_0 - \delta < x < x_0)$

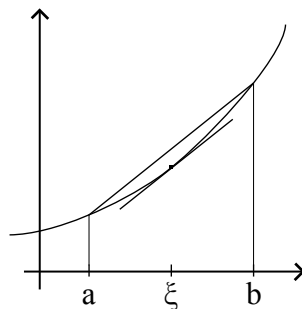
$f'(x_0) \leq 0$. Insgesamt: $f'(x_0) = 0$

5.10 Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, f differenzierbar in $]a, b[$.

Dann gibt es ein $\xi \in]a, b[$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

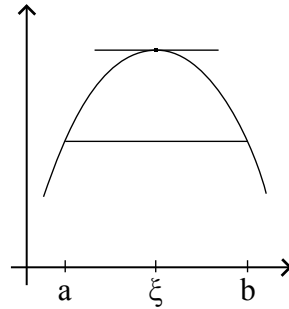


Wir führen den Mittelwertsatz auf einen Spezialfall zurück.

5.11. Satz von Rolle

Gilt unter den Voraussetzungen des Mittelwertsatzes zusätzlich $f(a) = f(b)$, so gibt es ein $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = 0$$



Beweis von Satz 5.11

1. Fall: f konstant. Dann gilt die Behauptung wegen $f'(x) = 0 \quad (x \in]a, b[)$
2. Fall: f nicht konstant. Dann existiert ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$.

$$\text{O.E.d.A. } f(x_0) > \underbrace{f(a)}_{=f(b)}$$

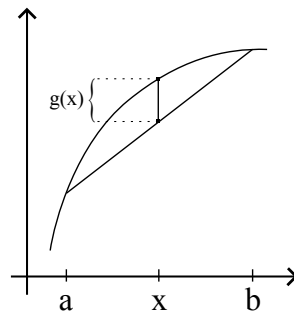
Nach Satz 4.9 besitzt f eine Maximumstelle $\xi \in [a, b]$

Wegen $f(x_0) > f(a)$ und $f(x_0) > f(b)$ gilt $\xi \in]a, b[$.

Aus Satz 5.9 ergibt sich $f'(\xi) = 0$.

Beweis von Satz 5.10

$$g(x) := f(x) = \left(\frac{b-x}{b-a} \cdot f(a) + \frac{x-a}{b-a} \cdot f(b) \right) \quad (x \in [a, b])$$



g erfüllt $g(a) = g(b) = 0$. g ist stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$.

Nach dem Satz von Rolle gibt es daher ein ξ mit $g'(\xi) = 0$, d.h.

$$f'(\xi) - \left(\frac{-f(a)}{b-a} + \frac{f(b)}{b-a} \right) = 0$$

oder

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

5.12. Folgerung

Sei I ein offenes Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

- (a) $f'(x) > 0 \quad (x \in I) \Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend
 $f'(x) < 0 \quad (x \in I) \Leftrightarrow f$ streng monoton fallend
- (b) $f'(x) \geq 0 \quad (x \in I) \Leftrightarrow f$ monoton wachsend
 $f'(x) \leq 0 \quad (x \in I) \Leftrightarrow f$ monoton fallend

Bemerkung: Die Umkehrung in (a) gilt im Allgemeinen nicht:

$f(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$ streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.

Beweis:

(a)

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 < x_2 \\ f(x_1) - f(x_2) \end{array} \\ \text{Mittelwertsatz} & \quad \underline{\underline{=}} \quad \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \cdot \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \quad (\xi \in]x_1, x_2[\text{ geeignet}) \\ & \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

2. Aussage analog

(b) „ $\Rightarrow$ “: wie in (a)

$$\text{„}\Leftarrow\text{“: } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\geq 0} \geq 0$$

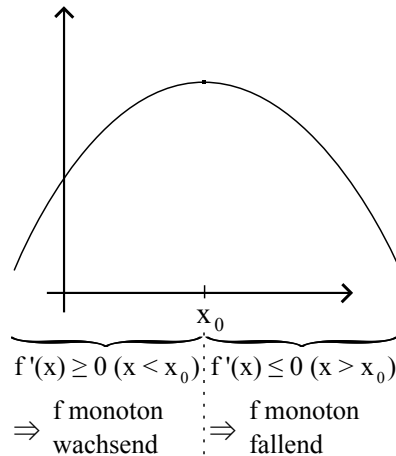
2. Aussage analog

5.13 Anwendung [Hinreichende Bedingung für ein (globales) Extremum]

Sei I ein offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$.

Falls $f'(x) \geq 0$ ($x \in I, x < x_0$) und $f'(x) \leq 0$ ($x \in I, x > x_0$),
dann hat f in x_0 ein (globales) Maximum.

Falls $f'(x) \leq 0$ ($x \in I, x < x_0$) und $f'(x) \geq 0$ ($x \in I, x > x_0$),
dann hat f in x_0 ein (globales) Minimum.



(x_0 Maximumstelle von f)

Höhere Ableitungen

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so heißt f zweimal differenzierbar in a (Bezeichnung: $f''(a)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(a)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}|_{x=a}$).

Allgemeiner durch rekursive Definition: $f^{(0)} := f$

Ist $f^{(k-1)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $a \in D$ differenzierbar, so f k -mal differenzierbar in a .

(Bezeichnung: $f^{(k)}(a)$, $\frac{d^k f}{dx^k}(a)$, $\frac{d^k f}{dx^k}|_{x=a}$)

Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal differenzierbar und $f^{(k)}$ stetig, so heißt f k -mal stetig differenzierbar.

5.14 Satz (Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum)

Sei I ein offenes Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und in einem $x_0 \in I$ zweimal differenzierbar.

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.
 Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.

Beweis:

$$\text{Setze } \Phi(x) := \begin{cases} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} & (x \neq x_0) \\ f''(x_0) & (x = x_0) \end{cases}$$

Sei $f''(x_0) < 0$. Φ ist nach Hilfssatz 5.4 stetig und daher wegen $f''(x_0) < 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung $U_\delta(x_0)$ kleiner also 0.

[Folgt aus Satz 4.20 s.u.]

Somit

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0 \quad (x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, x \neq x_0)$$

Hieraus

$$\begin{aligned} f'(x) - f'(x_0) &> 0 & (x_0 - \delta < x < x_0) \\ f'(x) - f'(x_0) &< 0 & (x_0 < x < x_0 + \delta) \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus 5.13 angewandt auf $f|_{U_\delta(x_0)}$